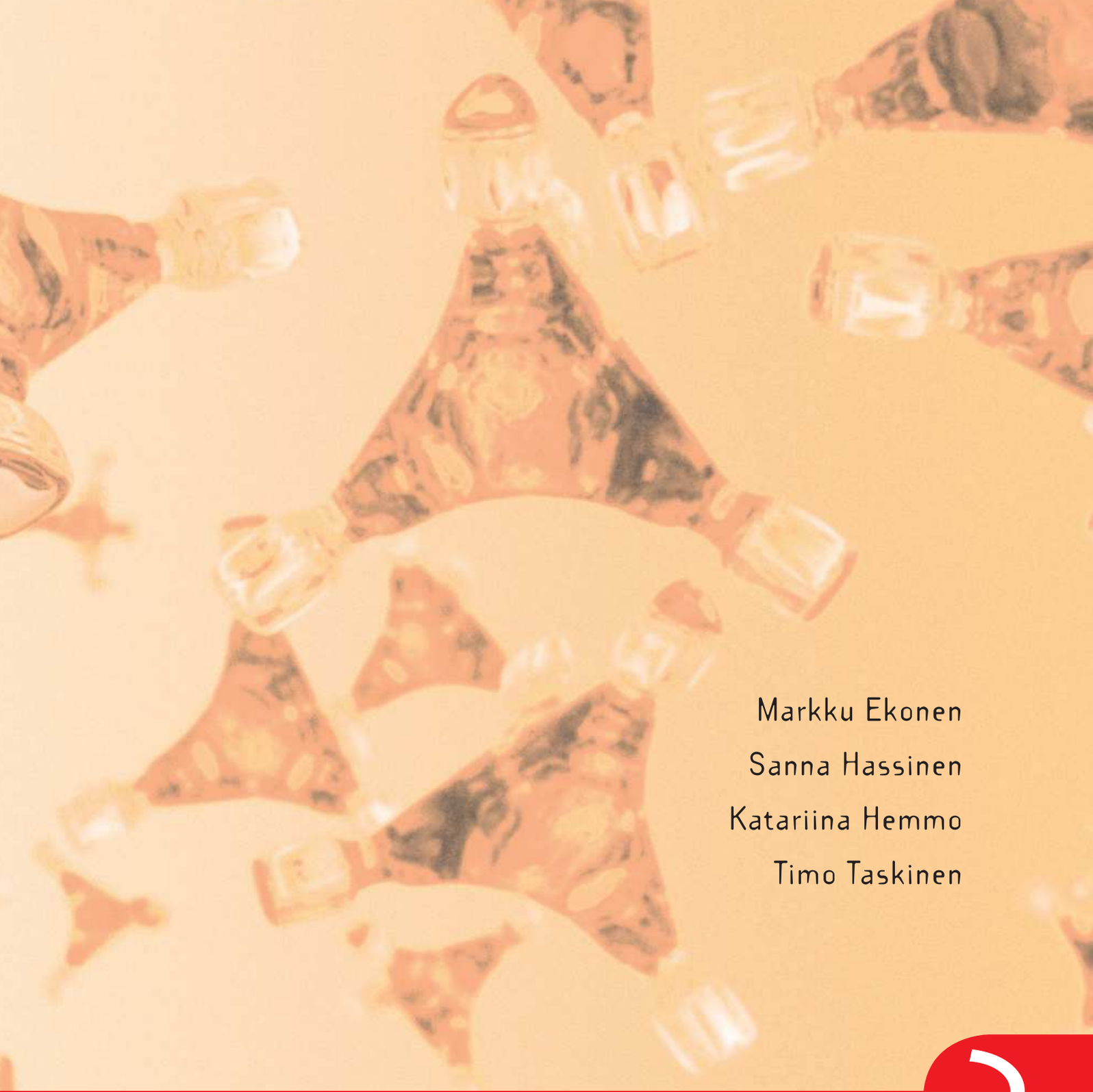


Markku Ekonen
Sanna Hassinen
Katariina Hemmo
Timo Taskinen

LUKION LYHYT MATEMATIIKKA 2

SIGMA

Geometria

Sanoma Pro Oy • Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-0326-0 Sigma 2

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1951-3
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1952-0

Valokuvat: iStockphoto (s. 8, 17, 35, 40, 48, 52, 69, 72, 83, 92, 101, 106, 121, 126), Lehtikuva (s. 77), Scanpix Sweden/Lehtikuva (s. 88), Suomen Kuvapalvelu Oy (s. 43), Tapani Romppainen (s. 91)

Piirrokset: Marja Venäläinen ja Juho Niemelä
Typografia: Riitta Piuva
Taitto: Pirjo Seppä
Kansi: Riitta Piuva
Kannen kuva: Getty Images
Toimitus: Sanna Mäkitalo

© Markku Ekonen, Sanna Hassinen, Katariina Hemmo, Timo Taskinen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Sisällys

1 Monikulmiot 7
1.1 Mitä geometria on? 7
1.2 Kulmia 9
Tehtäviä 17
1.3 Yhdenmuotoisuus 21
Tehtäviä 26
1.4 Yhdenmuotoisuussuhde 28
Tehtäviä 32
1.5 Pythagoraan lause 34
Tehtäviä 40
1.6 Suorakulmaisen kolmion trigonometria 43
Tehtäviä 49
1.7 Pinta-aloja 53
Tehtäviä 59

2 Ympyrä 63
2.1 Kehän pituus ja ala 63
Tehtäviä 69
2.2 Sektori ja segmentti 73
Tehtäviä 81
2.3 Ympyrän tangentti 85
Tehtäviä 91

3 Avaruuskappaleita 95
3.1 Lieriö 95
Tehtäviä 104
3.2 Kartio 108
Tehtäviä 116
3.3 Pallo 119
Tehtäviä 126

4 Kertausosa 130

5 Ekstrat 141

Tehtävien vastaukset 150

Hakemisto 154

Kirjan käyttäjälle

Matematiikan opetuksen tarkoituksena on rohkaista opiskelijaa oivaltavaan oppimiseen, kehittää matemaattista ajattelua ja ongelmanratkaisutaitoa. Sigman rakenne tukee näiden tavoitteiden toteutumista.

Pohdinta

Osa kirjan alaluvuista alkaa pohdintatehtävillä. Niiden tarkoituksena on yleensä johdatella opetettavaan aiheeseen ja herättää kysymyksiä. Opettaja voi käyttää tehtäviä osana opetusta, tai opiskelija voi tutustua tehtäviin itsenäisesti.

Teoria

Teoria on jaettu aihekokonaisuuksiin sivuotsikoiden avulla. Näin eri osa-alueet löytyvät helpommin. Suuremmat kokonaisuudet voidaan otsikoiden avulla jakaa sopiviin opetuskokonaisuuksiin.

Tehtävät

Tehtävät on koottu teorian mukaisten sivuotsikoiden avulla kokonaisuuksiksi, joista on helppo valikoida sopivat tehtävät aihepiirin ja vaikeusasteen mukaan.

120. Vaativammat tehtävät on merkitty väripohjalla.

E1 Joidenkin harjoitustehtävien edessä olevan esimerkkiviittauksen tarkoituksena on tukea harjoittelemista sekä oppitunnilla että kotona. Jokaista kirjan esimerkkiä vastaa tehtäväosiossa samantyyppinen tehtävä.

Kirjassa on mukana vanhoja ylioppilastehtäviä. Ylioppilaskokeen vuosi ja tehtävänumero on ilmoitettu tehtävänannon lopussa, esimerkiksi [S2008, 1].

Sekalaisia tehtäviä

Tehtäväosion lopussa on sekalaisia tehtävä-osio, johon on koottu muutama tehtävä koko luvun aihealueista. Tämän osion tehtäviä voi käyttää esimerkiksi kotitehtävinä.

Keskeisiä käsitteitä

Jokainen luvun lopussa on käsitekartta, joka kokoaa luvun keskeiset käsitteet.

Kertausosa

Kirjan lopussa olevaan kertausosaan on koottu lyhyesti kunkin luvun tärkeimmät asiat. Jokaiseen lukuun liittyy lisäksi kertaustehtäviä. Kertausosan lopussa on myös kolme harjoituskoetta.

Ekstrat

Kirjan loppuun on koottu ekstraluvuksi kurssiin liittyvää oheismateriaalia. Ekstroja voi tarpeen mukaan käyttää joko opetuksessa tai opiskelijan omana lukemistona. Teoriaosassa on viittauksia ekstralukuun.

Helsingissä kesäkuussa 2011

Tekijät

Ohjeita geometrian kurssin opiskeluun

Välineet

Geometrian kurssissa lasketaan pääasiassa kulmia, pituuksia, pinta-aloja ja tilavuuksia. Tehtävien ratkaisuissa tarvitset

- geokolmion, kulmien mittaamiseen
- harpin, ympyrän piirtämiseen
- taulukkokirjan, jossa on laskukaavat monikulmioiden pinta-alojen ja kappaleiden tilavuuksien laskemista varten
- laskimen, jolla lasketaan trigonometristen funktioiden (sin, cos, tan) arvot.

Useista geometrian tilanteista kannattaa piirtää kuva. Tarvitset apuna harppia, geokolmiota tai viivainta.

PIIRRÄ
MALLIKUVA

Kertaa aiemmin opittua

Tilanteesta muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

Kertaa kurssissa Lausekkeet ja yhtälöt oppimasi yhtälöt ja niiden ratkaiseminen.

- ensimmäisen asteen yhtälöt
- toisen asteen yhtälöt
- verranto ja verrannollisuus

Lisäksi tarvitset prosenttilaskennan perustietoja, jotka on myös opittu kurssissa Lausekkeet ja yhtälöt.

ILMOITA
VASTAUS

Vastaus voi sisältää lukuarvon lisäksi yksikön. Tässä kurssissa yksikkömuunnokset voi kerrata kirjan lopussa olevan ekstraluvun avulla.

Anna vastaus sopivaan tarkkuuteen pyöristettynä lähtöarvojen mukaisesti. Vastauksen tarkkuus esitellään kurssin Lausekkeet ja yhtälöt ekstraluvussa.

1 Monikulmiot

1.1 Mitä geometria on?

Sana geometria on alun perin tarkoittanut maan mittaamista. Varhaisissa kulttuureissa geometrian taitoja tarvittiin käytännön mittaustarpeisiin: Niilin tulvan jälkeen viljelyspalstojen koko muuttui ja oli saatava selville veron perusteena oleva palstan uusi pinta-ala. Intiasta löytyneet vanhimmat geometriset tulokset sisältävät niin sanotut ”narun säännöt”, joita ilmeisesti sovellettiin alttareiden ja temppeleiden rakentamiseen.

On epäselvää, perustuuko geometrian kehitys pelkästään käytännöllisiin mittaustarpeisiin. Voi olla, että esihistoriallinen ihminen oli kiinnostunut kuvioista niiden muodon kauneuden tuottaman mielihyvän vuoksi. On myös esitetty, että geometria sai alkunsa primitiivisistä ritualistisista käytännöistä. Varmaa tietoa siitä, mikä sai kivikautiset ihmiset mittaamaan, laskemaan ja piirtämään, ei kuitenkaan ole.

Käytännön mittaustarpeista riippumattomaan asemaan geometria nousi antiikin Kreikassa. Antiikin tunnetuin matemaatikko, Eukleides, kokosi yhteen ja esitti loogisessa järjestyksessä senaikaisen alkeismatematiikan teoksessaan ’Alkeet’. Se koostuu kolmestatoista kirjasta, jotka sisältävät paitsi geometriaa myös aritmetiikkaa ja algebraa. Geometriasta käsitellään muun muassa kolmioiden yhtenevyyttä ja suunnikkaita koskevia tuloksia sekä Pythagoraan lausetta.

’Alkeet’ on enemmän kuin mikään muu teos vaikuttanut matematiikan kehitykseen. Sitä käytettiin pitkään, aina 1900-luvulle saakka, yliopistojen ja koulujen oppikirjana. Sen merkitystä kuvastaa sekin, että ’Alkeet’ on raamatun jälkeen maailman käännetyin kirja.

Eukleideen kirjan merkitys ei johdu niinkään sen sisältämistä matemaattisista tosiasioista, vaan menetelmästä, jolla näihin tosiin väittämiin on päästy. Lähtökohtana ovat perusolettamukset eli aksioomat, jotka oletetaan tosiksi. Näistä perusolettamuksista johdetaan loogisesti oikein päättelemällä uusia tosia väitteitä. Tätä menetelmää, jonka avulla saadaan uutta matemaattista tietoa, sanotaan **aksiomaattiseksi menetelmäksi**. Aksiomaattinen menetelmä on yhä matematiikan perusmetodi.

Geometristen kuvioiden tai kappaleiden voidaan ajatella koostuvan yksinkertaisemmista osista, kuten pisteistä, janoista ja suorista. Esimerkiksi kolmio koostuu sen sivuina olevista janoista ja kolmion piirin sisään jäävistä pisteistä. Pallon puolestaan muodostavat ne pisteet, joiden etäisyys keskipisteestä on korkeintaan pallon säde. Viime kädessä jokainen kuvio ja kappale muodostuu pisteistä.

Geometriassa tutkitaan kuvioiden ja kappaleiden muotoa ja kokoa. Kuviot ja kappaleet luokitellaan muodon perusteella. Niiden kokoa puolestaan voidaan mitata niiden pituudella, pinta-alalla ja tilavuudella. Ulotteisuutensa perusteella geometriset objektit jaetaan **tasokuvioihin** ja **avaruuskappaleisiin**.

Tasogeometriassa tutkitaan tasokuvioita eli kuvioita, joiden kaikki pisteet kuuluvat samaan tasoon. Tasokuviot voidaan niiden muodon perusteella jakaa niihin, joiden reuna koostuu suorista viivoista ja niihin, joiden reuna sisältää käyriä viivoja. Yksinkertaisimpia tasokuvioita, joiden reuna sisältää vain suoria viivoja, ovat monikulmiot. Tärkein tasokuvio, jonka reuna ei ole suora, on ympyrä. Tasokuvion koon tärkein mitta on sen pinta-ala.

Avaruusgeometriassa tutkitaan tasokuvioiden lisäksi kolmiulotteisia avaruuskappaleita. Nämä voidaan jakaa niihin, joiden reuna kolmiulotteisessa avaruudessa koostuu vain tasokuvioista, ja niihin, joiden reuna sisältää kaareutuvia osia. Edellisistä yksinkertaisimpia ovat särmiöt ja pyramidit. Jälkimmäisiä ovat muun muassa ympyrälieriöt ja ympyräkartiot. Tärkein avaruuskappale, jonka reuna on kaareutuva, on pallo. Avaruuskappaleen koon luonnollinen mitta on sen tilavuus.

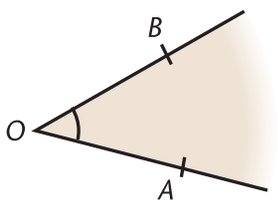
Kuvioita ja niiden ominaisuuksia voidaan tutkia paitsi käyttämällä hyväksi taso- ja avaruusgeometrian tunnettuja perusoletamuksia ja näistä seuraavia tosiasioita, myös soveltamalla trigonometriaa ja analyyttistä geometriaa. Erityisen hyvin trigonometrian ja analyyttisen geometrian tarjoamat keinot sopivat laskennallisten ongelmien ratkaisemiseen. Näistä kahdesta apuneuvosta trigonometriaa käsitellään tässä kirjassa, analyyttiseen geometriaan palataan myöhemmin.

1.2 Kulmia

Erilaisia kulmia

Kulma on kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran rajoittama tason osa. Alla olevassa kuvassa puolisuorat *OA* ja *OB* jakavat tason kahteen kulmaan. Siihen, jota näistä kahdesta kulmasta tarkoitetaan, piirretään pieni ympyränkaari.

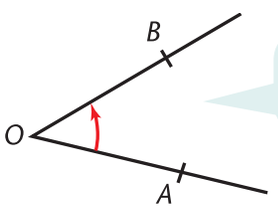
Geometrian peruskäsitteitä s. 141



kulma *AOB*

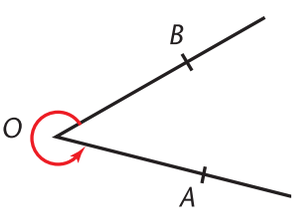
Kulman *AOB* voidaan ajatella syntyneen seuraavasti: alussa puolisuora *OB* on ollut puolisuoran *OA* kanssa päällekkäin. Tämän jälkeen puolisuoraa *OB* on kierretty vastapäivään nykyiseen paikkaansa. Puolisuora, jota on kierretty vastapäivään, on syntyneen kulman **vasen kylki**. Paikalleen jäänyt kylki on **oikea kylki**.

Kun katsot kulman kärjestä kulman aukeamissuuntaan, vasen kylki on vasemmalla puolella ja oikea kylki oikealla puolella.



OB on kulman vasen kylki.
OA on kulman oikea kylki.

Kulman nimeäminen aloitetaan oikeasta kyljestä. Yllä olevan kulman nimi on *AOB*. Koska alla olevan kulman oikeana kylkenä on puolisuora *OB*, kulman nimi on *BOA*.

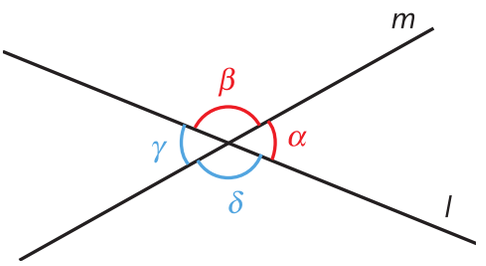


kulma *BOA*

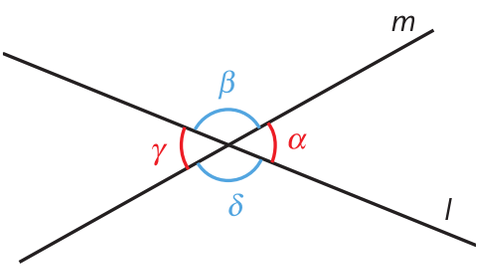
Kulmaa voidaan merkitä myös pienellä kreikkalaisella kirjaimella, kuten α (alfa), β (beeta), γ (gamma) tai δ (delta).

Kulmia nimetään ja luokitellaan niiden suuruuden mukaan. Kulman suuruutta voidaan mitata monella eri tavalla. Yleensä se ilmoitetaan asteina.

Kun kaksi erisuuntaista suoraa l ja m leikkaavat toisensa, leikkauspisteeseen muodostuu neljä kulmaa.

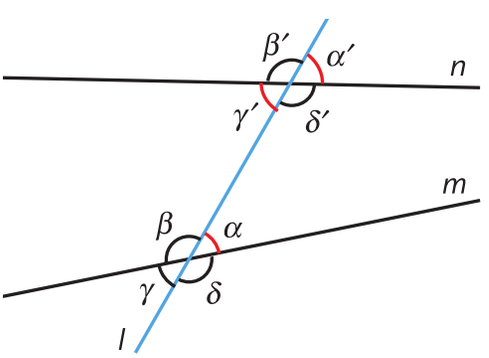


Suorien leikkauspisteessä vierekkäin olevia kulmia α ja β kutsutaan toistensa **vieruskulmiksi**. Ne muodostavat yhdessä **oikokulman**, joten vieruskulmien summa on 180°. Myös kulmat β ja γ ovat vieruskulmia. Vieruskulmien summa on aina 180°.

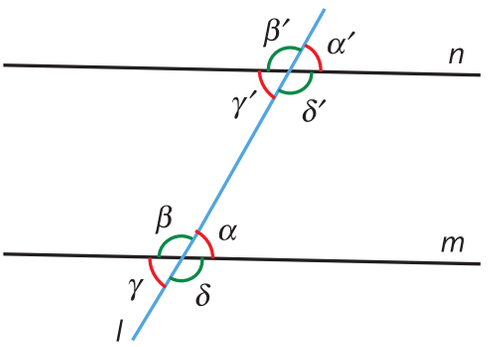


Kulmat α ja γ ovat suorien l ja m leikkauspisteessä vastakkain. Tällaisia kulmia kutsutaan toistensa **ristikulmiksi**. Ristikulmat ovat aina yhtä suuret. Myös kulmat β ja δ ovat toistensa ristikulmia.

Jos suora l leikkaa kahta muuta suoraa m ja n, niin kummankin leikkauspisteeseen muodostuu neljän kulman ryhmä. Esimerkiksi kulmalla α suora l on vasempana kylkenä. Myös toisen ryhmän kulmilla α' ja γ' suora l on vasempana kylkenä. Tällaisia kulmia α ja α' sekä α ja γ' sanotaan **samankohtaisiksi kulmiksi**.



Kahta eri ryhmään kuuluvaa kulmaa sanotaan siis samankohtaisiksi, jos sama suora on molemmilla samannimisenä kylkenä. Jos suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.



Näitä erilaisia kulmiin liittyviä ominaisuuksia tarvitaan esimerkiksi kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteluissa. Yhdenmuotoisuutta käsitellään seuraavassa kappaleessa.

TÄRKEITÄ KULMIA

Vieruskulmat

- Kahden suoraan leikkauspisteessä vierekkäin olevia kulmia kutsutaan vieruskulmiksi.
- Vieruskulmien summa on 180°.

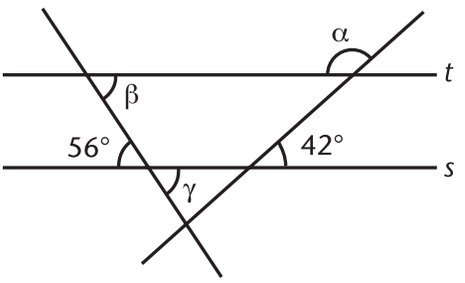
Ristikulmat

- Kahden suoran leikkauspisteessä vastakkain olevia kulmia kutsutaan ristikulmiksi.
- Ristikulmat ovat aina yhtä suuret.

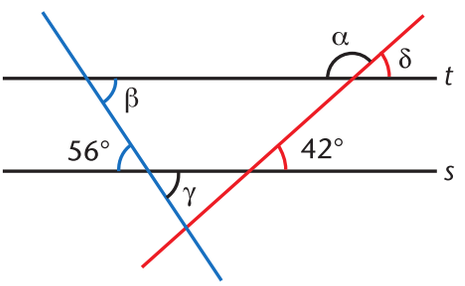
Samankohtaiset kulmat

- Kun sama suora (l) leikkaa kahta muuta suoraa (m ja n) leikkauspisteisiin muodostuu kaksi kulmaryhmää. Kahta eri kulmaryhmään kuuluvaa kulmaa kutsutaan samankohtaisiksi, jos kulmilla on leikkaava suora samannimisenä kylkenä.
- Jos suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset, samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

ESIMERKKI 1 Suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset. Laske kulmat α, β ja γ.



RATKAISU Merkitään kuvioon apukulma δ.



Kulmalla δ ja 42°:n kulmalla on sama suora vasempana kylkenä, joten ne ovat samankohtaisia kulmia. Koska lisäksi suorat t ja s ovat yhdensuuntaisia, niin $\delta = 42°$.

Kulmat α ja δ ovat vieruskulmia, joten $\alpha = 180° - 42° = 138°$.

Kulmat γ ja 56° ovat ristikulmia, joten $\gamma = 56°$.

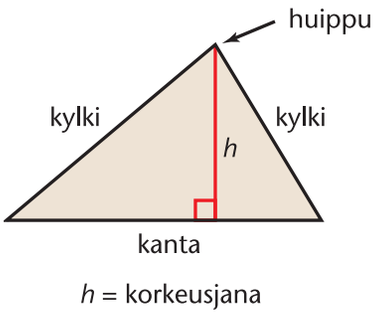
Kulmilla β ja γ on sama suora oikeana kylkenä, joten ne ovat samankohtaisia kulmia. Koska lisäksi suorat m ja n ovat yhdensuuntaisia, niin $\beta = 56°$.

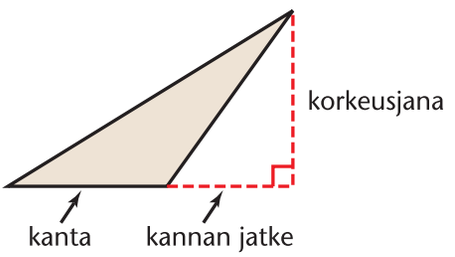
VASTAUS $\alpha = 138°$, $\beta = 56°$ ja $\gamma = 56°$

Monikulmioita

Kolmio on kolmen janan rajoittama tasoalue. Se on yksinkertaisin monikulmio.

Säännölliset monikulmiot s. 145

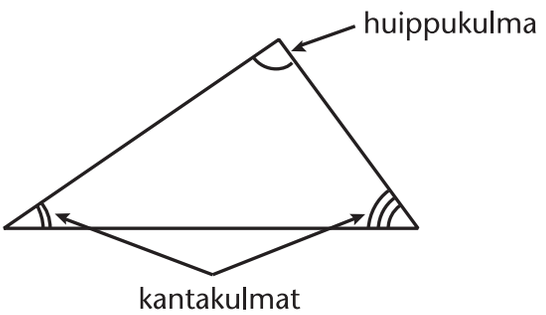




Jos tehtävässä ei ilmoiteta mitään lisätietoja kolmiosta, on syytä olettaa, että kaikki sivut ovat eripituisia ja kaikki kulmat erisuuruisia.

Kolmion sivuista voidaan yksi nimetä **kannaksi** ja kaksi muuta sivua **kyljiksi**. Kolmion **huipuksi** kutsutaan kannan vastaista kärkeä. Kolmion **korkeusjana** on huipusta kantaa tai sen jatketta vastaan kohtisuoraan piirretty jana.

Huipun ja kylkien väliin muodostuu **huippukulma**. Kannan ja kylkien väliin muodostuu kaksi **kantakulmaa**.



Erilaisia kolmioita s. 143

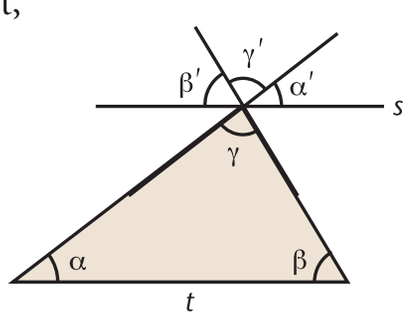
Kolmioita voidaan luokitella kulmien suuruuksien ja sivujen pituuksien perusteella. Esimerkiksi tasasivuinen kolmio on kolmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

Kolmion kulmien summa on 180°. Tämä voidaan perustella seuraavasti:

Jatketaan kolmion kylkiä ja piirretään kannan t suuntainen suora s huippuun, jolloin muodostuu kolmen kulman ryhmä α', β' ja γ'. Ne muodostavat yhdessä 180°:n kulman eli $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$.

Koska suorat t ja s ovat yhdensuuntaiset,

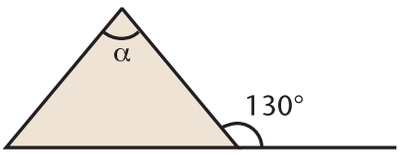
- $\alpha = \alpha'$ (samankohtaiset kulmat)
- $\beta = \beta'$ (samankohtaiset kulmat)
- $\gamma = \gamma'$ (ristikulmat)



Näin ollen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Kolmion kulmien summa on 180°.

ESIMERKKI 2 Määritä huippukulman α suuruus, kun kolmion kyljet ovat yhtä pitkät eli kolmio on tasakylkinen.



RATKAISU

Erilaisia kolmioita s. 143

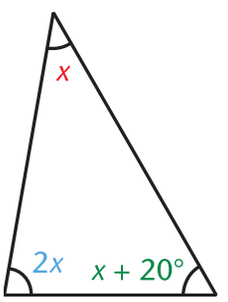
Koska kolmio on tasakylkinen, kantakulmat ovat yhtä suuret. Kantakulma ja 130 asteen kulma muodostavat yhdessä oikokulman (ne ovat vieruskulmia), joten kantakulma on
$180° - 130° = 50°$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 50° + \alpha &= 180° \\ \alpha &= 180° - 100° \\ \alpha &= 80° \end{aligned}$$

VASTAUS Huippukulma α on 80°.

ESIMERKKI 3 Kolmion toinen kantakulma on kaksi kertaa niin suuri kuin huippukulma. Pienempi kantakulma on 20° suurempi kuin huippukulma. Määritä kolmion kulmat.

RATKAISU Merkitään huippukulman suuruutta asteina kirjaimella x. Suurempi kantakulma on tällöin $2x$ ja pienempi $x + 20°$.



Koska kolmion kulmien summa on 180°, saadaan yhtälö

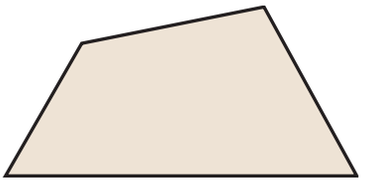
$$\begin{aligned} x + 2x + x + 20° &= 180° \\ 4x &= 160° \quad \vert : 4 \\ x &= 40° \end{aligned}$$

Huippukulma on 40°.
Suurempi kantakulma on $2 \cdot 40° = 80°$.
Pienempi kantakulma on $40° + 20° = 60°$.

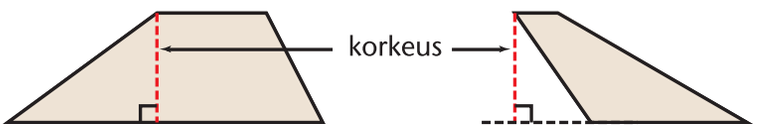
VASTAUS Kolmion kulmat ovat 40°, 80° ja 60°.

Nelikulmio

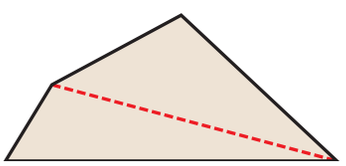
Nelikulmio on monikulmio, jossa on neljä sivua.



Yleisesti nelikulmion kaikki sivut ovat eripituisia ja erisuuntaisia. Jatkossa tarkastelemme nelikulmioita, joissa on ainakin kaksi yhdensuuntaista sivua. Tällöin nelikulmion **korkeus** on yhdensuuntaisten sivujen välinen kohtisuora etäisyys.



Nelikulmio voidaan jakaa lävistäjällä kahdeksi kolmioksi.



Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin nelikulmion kulmien summaksi saadaan $2 \cdot 180° = 360°$.

> Nelikulmion kulmien summa on 360°.

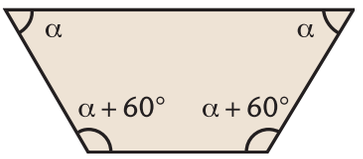
Erilaisia nelikulmioita s. 144

Nelikulmioita voidaan luokitella kulmien suuruuksien, sivujen pituuksien ja sivujen suuntien perusteella. Esimerkiksi suunnikas on nelikulmio, jossa vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset. Puolisuunnikas on nelikulmio, jossa on kaksi yhdensuuntaista sivua.

ESIMERKKI 4 Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat 60° suurempia kuin kannan vastaiset kulmat. Laske kulmien suuruudet.

RATKAISU Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat keskenään yhtä suuria.

Erilaisia nelikulmioita s. 144



Samoin kannan vastaiset kulmat ovat keskenään yhtä suuret.

Merkitään kannan vastaisia kulmia kirjaimella α. Tällöin kantakulmat ovat $\alpha + 60°$.

Koska nelikulmion kulmien summa on 360°, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}(\alpha + 60°) + (\alpha + 60°) + \alpha + \alpha &= 360° \\ 4\alpha + 120° &= 360° \\ 4\alpha &= 240° \quad |: 4 \\ \alpha &= 60°\end{aligned}$$

Kantakulmien suuruus on $60° + 60° = 120°$.

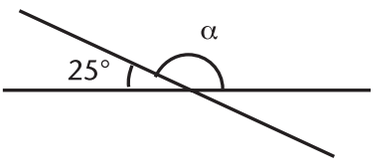
VASTAUS Kantakulmat ovat 120° ja kannan vastaiset kulmat 60°.

Tehtäviä

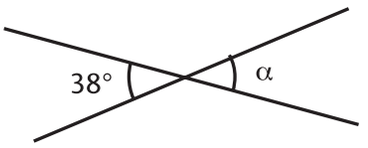
Erilaisia kulmia

1. Laske kulman α suuruus.

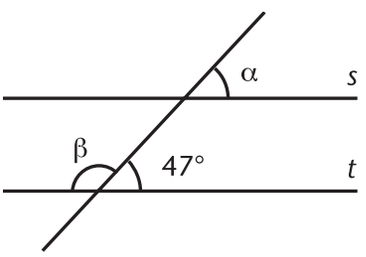
a)



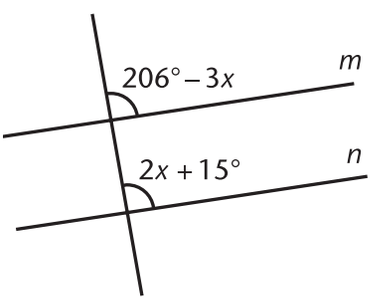
b)



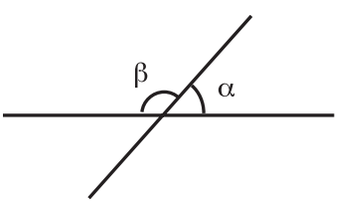
E1 2. Laske kulmien α ja β suuruus, kun suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset.



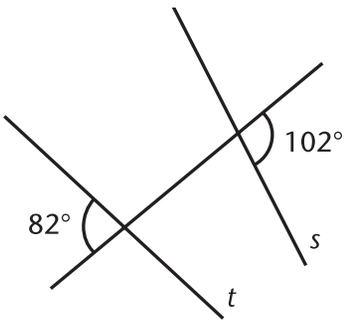
3. Ratkaise x, kun suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset.



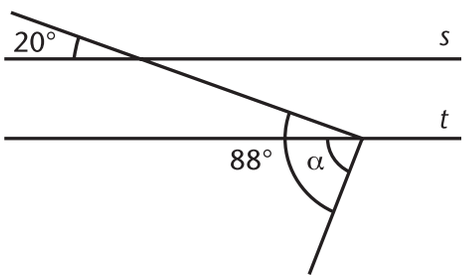
4. Kulmien α ja β astelukujen suhde on 3:8. Laske kulmat asteen tarkkuudella.



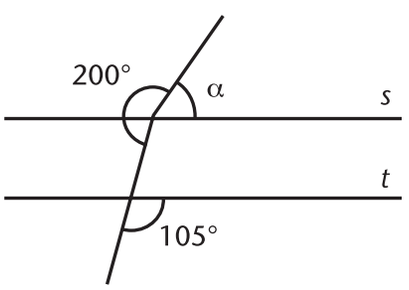
5. Ovatko suorat s ja t yhdensuuntaisia? Perustele.



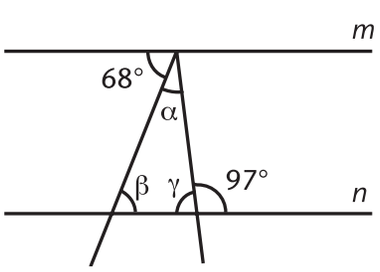
6. Laske kulman α suuruus, kun suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset.



7. Laske kulman α suuruus, kun suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset.



8. Laske kulmien α, β ja γ suuruus, kun suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset.



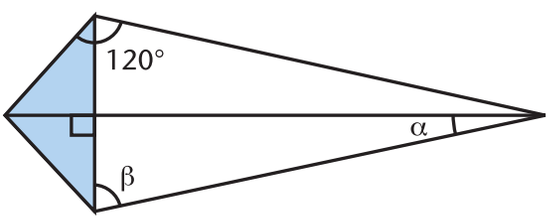
Moni-kulmioita

E2 9. Määritä huippukulman β suuruus, kun kolmio on suorakulmainen.

E3 10. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 33° pienempi kuin kantakulma. Laske kolmion kulmat.

11. Kolmion kulmien astelukujen suhde on 1:3:5. Määritä kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

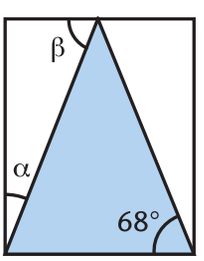
12. Värilliset kolmiot ovat tasakylkisiä. Laske kulmat α ja β.



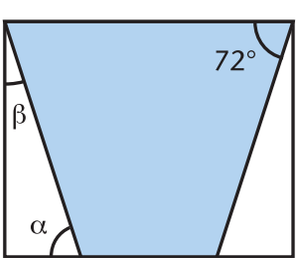
E4 13. Puolisuunnikas sisältää kaksi suoraa kulmaa. Kahdesta muusta kulmasta toinen on 35° suurempi kuin toinen. Laske näiden kulmien suuruudet.

14. Laske kulmat α ja β, kun

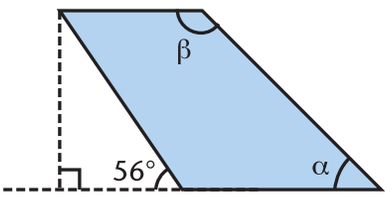
a) nelikulmio on neliö ja kolmio on tasakylkinen



b) suorakulmion sisällä on tasakylkinen puolisuunnikas.



15. Laske puolisuunnikkaan kulmat, kun $\beta = 3\alpha$.

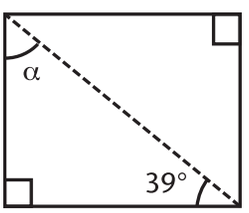


16. Suunnikkaan tylppä kulma on kaksi kertaa niin suuri kuin terävä kulma. Laske suunnikkaan kulmat.

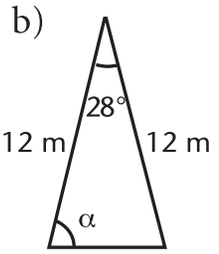
Sekalaisia tehtäviä

17. Laske kulma α.

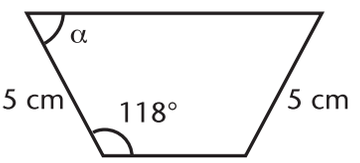
a)



b)

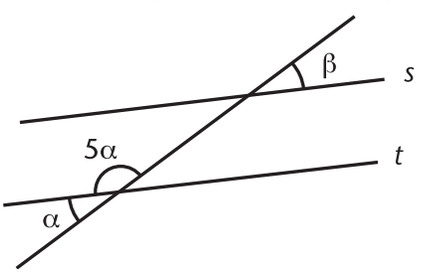


c)



18. Vieruskulmista toinen on 28° suurempi. Laske kulmien suuruudet.

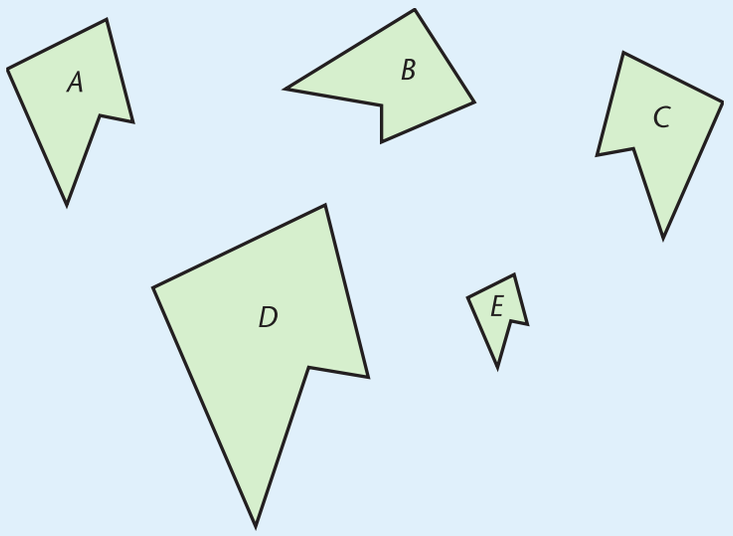
19. Laske kulma β, kun suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset.



20. Kolmion kantakulmista toinen on 18° suurempi kuin toinen. Huippukulma on kaksinkertainen suurempaan kantakulmaan verrattuna. Laske kolmion kulmat.

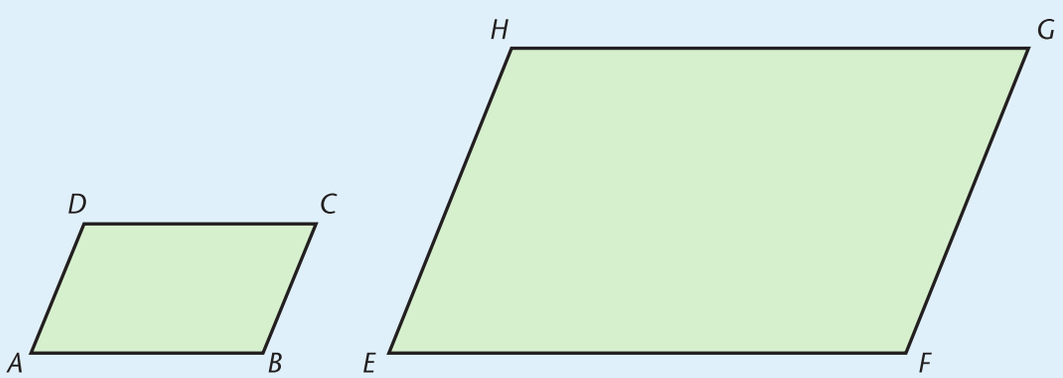
1.3 Yhdenmuotoisuus

POHDINTA 1 Miten kuviot *B*, *C*, *D* ja *E* on saatu kuviosta *A*?

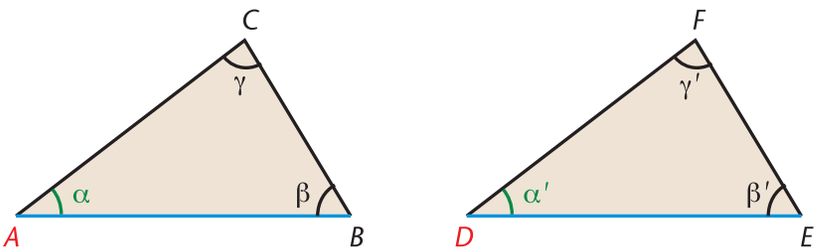


POHDINTA 2 Mittaa nelikulmioiden *ABCD* ja *EFGH* sivujen pituudet. Laske sivujen *EF* ja *AB* pituuksien suhde. Mitä voit sanoa muiden sivujen pituuksien suhteista?

Mittaa kulmien *ABC* ja *EFG* suuruudet. Mitä havaitset? Mitä voit sanoa muiden kulmien suuruuksista?



Kaksi monikulmiota ovat **yhteneviä**, jos ne ovat sekä samanmuotoiset että samankokoiset. Yhtenevät kuviot voidaan asettaa päällekkäin niin, että ne täysin peittävät toisensa. Kolmiot *ABC* ja *DEF* ovat yhteneviä.

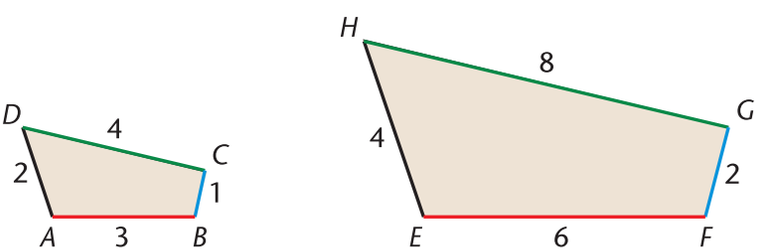


Kun kolmio *ABC* siirretään kolmion *DEF* päälle, niin päällekkäin tulevia osia sanotaan toistensa **vastinosiksi**.

Vastinkärjet	Vastinsivut	Vastinkulmat
A ja *D*	*AB* ja *DE*	α ja α'
B ja *E*	*BC* ja *EF*	β ja β'
C ja *F*	*AC* ja *DF*	γ ja γ'

Monikulmioita, joilla on sama muoto, sanotaan **yhdenmuotoisiksi**. Yhdenmuotoisilla monikulmioilla on sama muoto, mutta ne eivät välttämättä ole samankokoisia. Yhdenmuotoisia kuvioita syntyy esimerkiksi suurennettaessa tai pienennettäessä valokuvaa tai kopiota.

Nelikulmio *EFGH* on saatu nelikulmiosta *ABCD* suurentamalla. Tällöin nelikulmiot ovat keskenään samanmuotoiset mutta erikokoiset eli kuviot ovat yhdenmuotoiset.



Myös yhdenmuotoisten kuvioiden ollessa kyseessä puhutaan vastinosista. Nelikulmion *EFGH* jokainen sivu on kaksi kertaa niin pitkä kuin nelikulmion *ABCD* vastaava sivu.

$$\frac{EF}{AB} = \frac{6}{3} \quad \frac{FG}{BC} = \frac{2}{1} = 1 \quad \frac{GH}{CD} = \frac{8}{4} = 2 \quad \frac{HE}{DA} = \frac{4}{2} = 2$$

Vastinsivujen pituuksien suhde on 2.

Suurentamisessa ja pienentämisessä kulmien suuruus säilyy, joten nelikulmioiden *ABCD* ja *EFGH* vastinkulmat ovat yhtä suuret.

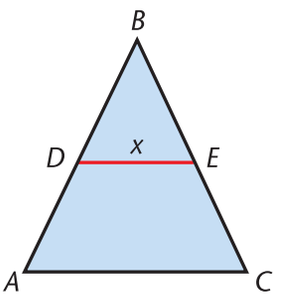
Tasokuvioiden yhdenmuotoisuus

Kaksi tasokuviota ovat yhdenmuotoiset täsmälleen silloin, kun

- niiden kaikkien vastinsivujen suhde on vakio
- niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret.

ESIMERKKI 1

Laske sivun x pituus, kun tiedetään, että tasakylkiset kolmiot *ABC* ja *DBE* ovat yhdenmuotoiset. Sivujen *AB* ja *EB* pituudet ovat 52 mm ja 28 mm. Kannan *AC* pituus on 45 mm.



RATKAISU

Sivun *AB* vastinsivu pienemmässä kolmiossa on *DB* ja sivun *AC* vastinsivu puolestaan *DE*.

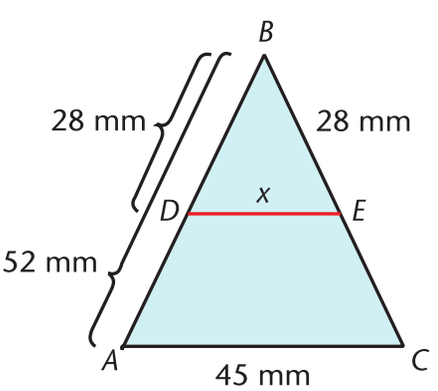
Yhdenmuotoisten monikulmioiden vastinsivujen suhde on sama, joten

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}$$

Tasakylkisten kolmioiden kyljet ovat yhtä pitkät, joten $DB = EB$. Saadaan verranto:

Kerrotaan ristiin.

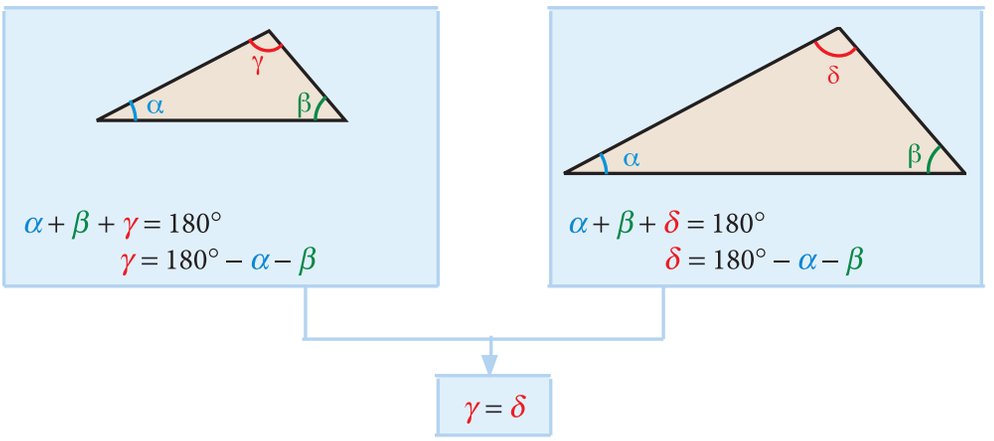
$$\frac{52}{28} = \frac{45}{x}$$
$$52x = 28 \cdot 45$$
$$x = 24{,}23\ldots \approx 24$$



VASTAUS

Sivun x pituus on 24 mm.

Jos kahden kolmion kulmat ovat yhtä suuret, kolmiot ovat yhdenmuotoisia. Koska kolmion kulmien summa on aina 180°, yhdenmuotoisuus seuraa jo kahden kulman yhtäsuuruudesta.

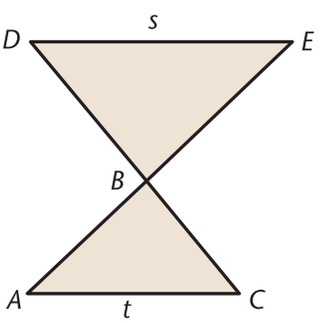


Kk-lause

Jos kahdessa kolmiossa on kaksi yhtä suurta kulmaa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

ESIMERKKI 2

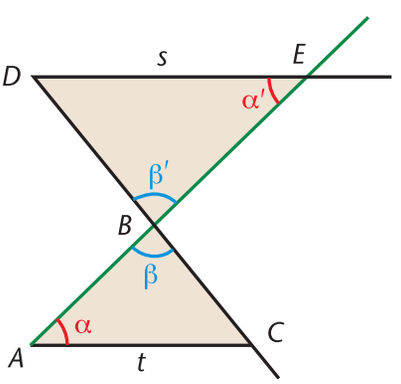
Osoita, että kolmiot *ABC* ja *BDE* ovat yhdenmuotoiset, kun janat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaiset. Mikä on sivun *AB* vastinsivu kolmiossa *BDE*?



RATKAISU

Kulmat β ja β' ovat ristikulmia, joten ne ovat yhtä suuret.

Kulmilla α ja α' on sama suora vasempana kylkenä, joten kulmat ovat samankohtaisia kulmia. Koska lisäksi suorat *s* ja *t* ovat suuntaisia, niin $\alpha = \alpha'$.



Kolmioilla *ABC* ja *BDE* on siis kaksi yhtä suurta vastinkulmaa, joten ne ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset.

Kolmion *ABC* kärjen *A* vastinkärki kolmiossa *BDE* on kärki *E*, joten sivun *AB* vastinsivu on sivu *EB*.

VASTAUS

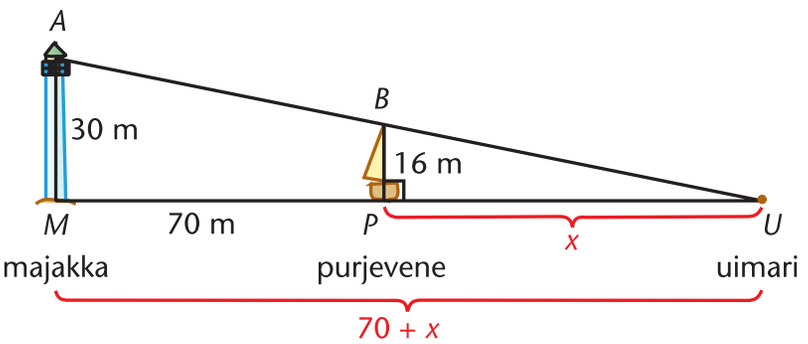
Kolmiot *ABD* ja *DEF* ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset. Sivun *AB* vastinsivu on sivu *EB*.

ESIMERKKI 3

Majakan valo on 30 metrin korkeudella meren pinnasta. Purjevene on 70 metrin päässä majakasta. Meressä oleva uimari näkee majakan valon juuri ja juuri purjeveneen maston takaa. Kuinka kaukana uimari on purjeveneestä, kun purjeveneen masto nousee 16 metrin korkeuteen merenpinnasta?

RATKAISU

Piirretään tilanteesta mallikuva.



Jos tehtävässä ei mainita kolmioiden yhdenmuotoisuutta, se on perusteltava lyhyesti.

Kolmiot MUA ja PUB ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoisia:

- Molemmilla kolmioilla on yhteinen kulma U.
- Molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana.

Tästä seuraa, että vastinsivujen suhteiden tulee olla samat.

$$\frac{MA}{PB} = \frac{MU}{PU}$$

$$\frac{30}{16} = \frac{70+x}{x}$$

Kerrotaan ristiin.

$$30x = 16(70+x)$$

$$30x = 1120 + 16x$$

$$14x = 1120 \quad |:14$$

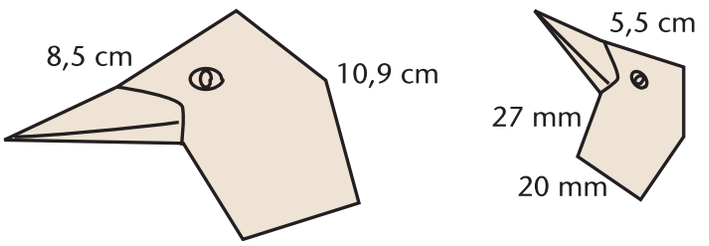
$$x = 80 \text{ (m)}$$

VASTAUS

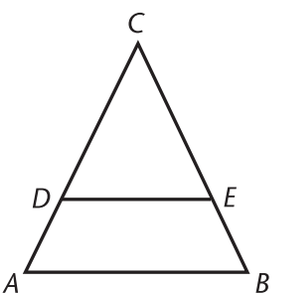
Uimari on 80 metrin päässä purjeveneestä.

Tehtäviä

E1 21. Seuraavat kuviot ovat yhdenmuotoiset.
a) Laske linnun takaraivon pituus pienemmässä kuviossa.
b) Laske linnun kaulan pituus ja leveys suuremmassa kuviossa.



E2 22. Perustele kolmioiden *ABC* ja *DEC* yhdenmuotoisuus, kun janat *AB* ja *DE* ovat yhdensuuntaisia.

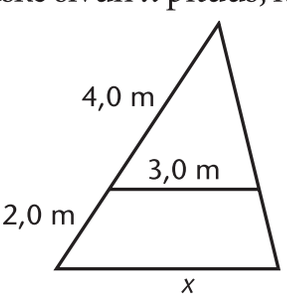


23. Teemu ja Tiina leikkasivat paperista suorakulmiot. Teemun suorakulmion mitat olivat 21 cm × 16 cm ja Tiinan suorakulmion mitat 4,3 cm × 1,8 cm. Ovatko Teemun ja Tiinan suorakulmiot yhdenmuotoisia?

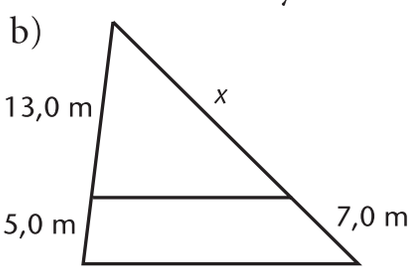
24. Tarkastellaan tehtävän 22 yhdenmuotoisia kolmioita *ABC* ja *DEC*. Piste *D* jakaa janan *AC* kärjestä *A* lukien suhteessa 2:5. Laske kannan *DE* pituus, kun kannan *AB* pituus on 7,8 cm.

25. Laske sivun *x* pituus, kun kolmioiden kannat ovat yhdensuuntaisia.

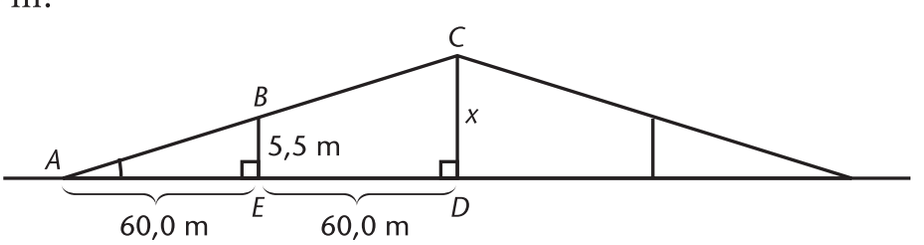
a)



b)



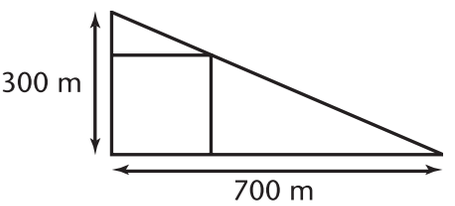
26. Kuinka korkea on sillan keskipilari, kun tukipilarin *EB* pituus on 5,5 m?



27. Teemu ja Tiina seisovat vierekkäin jalkapallokentän laidalla. Tiinan pituus on 152 cm. Laske Teemun pituus, kun Teemun varjon pituus on 1,9 m ja Tiinan varjon pituus 1,7 m.

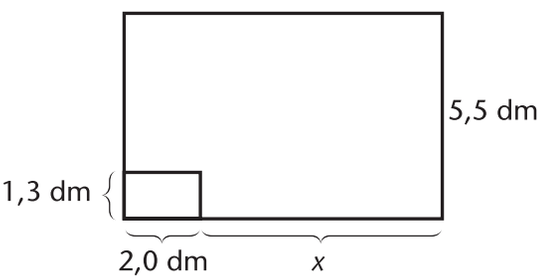
E3 28. Auton lähivalot on suunnattu siten, että 60 cm:n korkeudelta lähtevän valokiilan yläreuna laskee 5 m:n matkalla 5 cm. Kuinka kauaksi lähivalot tällöin valaisevat tietä? [S1994, 2b]

29. Suorakulmaisen kolmion muotoisesta tontista erotetaan neliön muotoinen alue kuvan osoittamalla tavalla. Laske erotetun alueen pinta-ala.

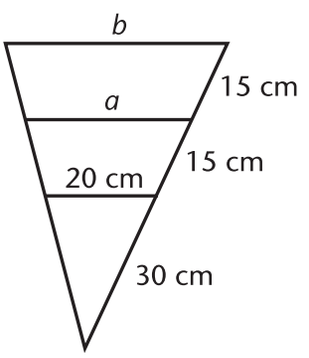


Sekalaisia tehtäviä

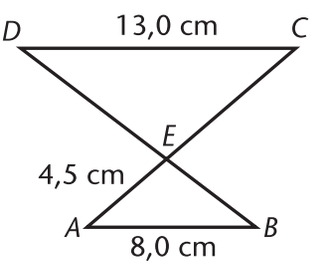
30. Määritä sivun x pituus, kun kuvan nelikulmiot ovat yhdenmuotoisia.



31. Köynnöskasvi tuettiin kuvassa olevalla kehikolla. Laske kehikon rimojen a ja b pituudet.



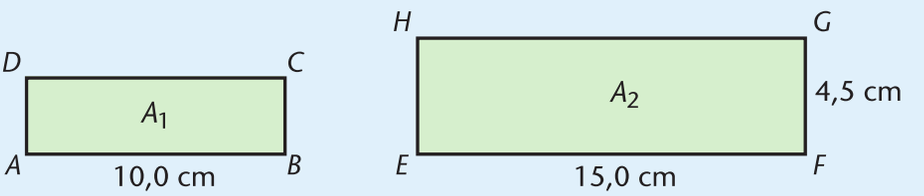
32. Määritä sivun EC pituus, kun sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaiset.



33. Veera asuu kerrostalon 6. kerroksessa. Hänen ikkunastaan näkyy puu, jonka korkeus on 6,5 m. Puun takana 25 metrin päässä on 4,5 m korkea lipputanko. Veera näkee juuri ja juuri lipputangon nupin. Näkeekö hän 30 metrin päässä lipputangosta olevan lammikon reunan?

1.4 Yhdenmuotoisuussuhde

POHDINTA 1 Suorakulmiot $ABCD$ ja $EFGH$ ovat yhdenmuotoiset.

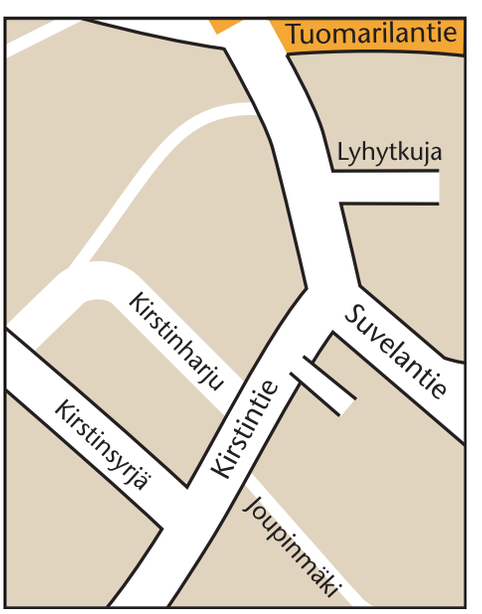


- Laske vastinosien suhde $\frac{AB}{EF}$.
- Laske sivun BC pituus.
- Laske suorakulmioiden pinta-alat A_1 ja A_2.
- Muodosta pinta-alojen suhde $\frac{A_1}{A_2}$. Mikä yhteys on vastinsivujen suhteella ja pinta-alojen suhteella?

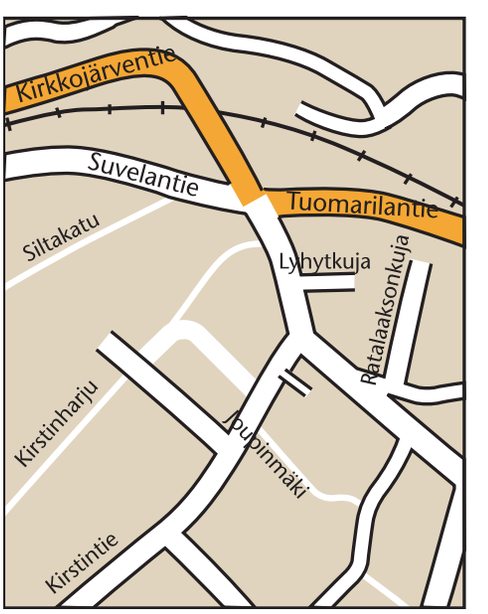
Mittakaava

Yhdenmuotoisten tasokuvioiden vastinsivut voivat olla suoria tai käyräviivaisia. Vastinsivujen pituuksien suhde on vakio. Tätä suhdetta nimitetään **yhdenmuotoisuussuhteeksi** eli **mittakaavaksi**.

Kartat ja rakennuspiirustukset ovat yksi yhdenmuotoisuuden vanhimmista sovelluksista. Nimitystä mittakaava käytetään yhdenmuotoisuussuhteesta erityisesti, kun kyseessä on kartta, piirustus tai pienoismalli. Mittakaavaa merkitään matematiikassa usein kirjaimella k.



Mittakaava 1:10 000



Mittakaava 1:5000

ESIMERKKI 1 Mikkelin ja Varkauden välinen matka pitkin valtatietä 5 on 88 km. Kuinka pitkä vastaava matka on kartalla, jonka mittakaava on 1 : 200 000?

RATKAISU Merkitään matkaa kartalla kirjaimella x.

Koska matka kartalla on todennäköisesti joitakin senttimetrejä, muutetaan kilometrit ensin senttimetreiksi.

Yksikkömuunnokset s. 147

$$88 \text{ km} = 88\,000 \text{ m} = 8\,800\,000 \text{ cm}$$

Taulukon sarakkeiden pituudet ovat aina samassa yksikössä.

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
1	200 000
x	8 800 000

Yhdenmuotoisuuden perusteella vastinosien pituuksien suhde on sama kuin mittakaava. Näin ollen saadaan verranto

$$\frac{1}{x} = \frac{200\,000}{8\,800\,000}$$
$$200\,000x = 8\,800\,000 \qquad | : 200\,000$$
$$x = 44 \quad \text{(cm)}$$

VASTAUS Mikkelin ja Varkauden välinen matka kartalla on 44 cm.

ESIMERKKI 2 Minka piirsi huoneestaan pohjapiirroksen. Piirroksessa huoneen pisimmän seinän pituus oli 20 cm. Mikä oli piirroksen mittakaava, kun huoneen pisimmän seinän pituus oli 4,6 m?

RATKAISU Muutetaan pituudet ensin samaan yksikköön.

$$4{,}6 \text{ m} = 460 \text{ cm}$$

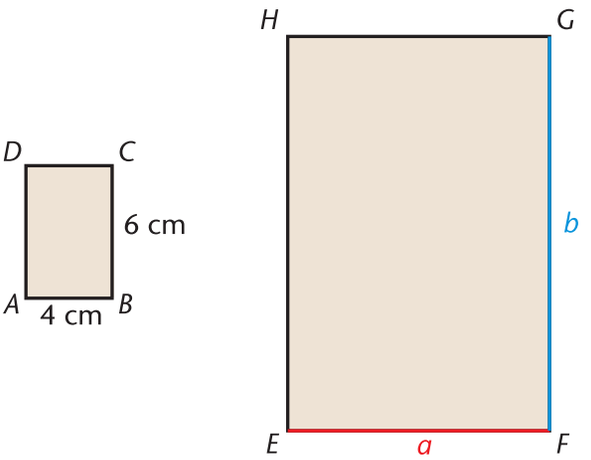
Mittakaava saadaan vastinosien pituuksien suhteesta. Kirjoitetaan vastinosien pituuksien suhde ja supistetaan se mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

$$k = \frac{20 \cancel{\text{ cm}}}{460 \cancel{\text{ cm}}} = \frac{20}{460} \overset{(20}{=} \frac{1}{23} = 1{:}23$$

VASTAUS Piirroksen mittakaava oli 1:23.

Pinta-alojen suhde

Tarkastellaan yhdenmuotoisia suorakulmioita *ABCD* ja *EFGH*. Suorakulmioiden yhdenmuotoisuussuhde eli mittakaava on 1:3.



Suorakulmioiden yhdenmuotoisuussuhde eli mittakaava on $k = 1{:}3$. Ratkaistaan tämän avulla suorakulmion *EFGH* sivujen pituudet a ja b.

Mittakaava on sama kuin vastinsivujen suhde

$$\frac{4\text{ cm}}{a} = \frac{1}{3} \qquad \frac{6\text{ cm}}{b} = \frac{1}{3}$$
$$a = 3 \cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm} \qquad b = 3 \cdot 6\text{ cm} = 18\text{ cm}$$

Lasketaan suorakulmioiden pinta-alojen suhde.

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{EFGH}} = \frac{4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm}}{12\text{ cm} \cdot 18\text{ cm}} = \frac{24\text{ cm}^2}{216\text{ cm}^2} \overset{(24}{=} \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = k^2$$

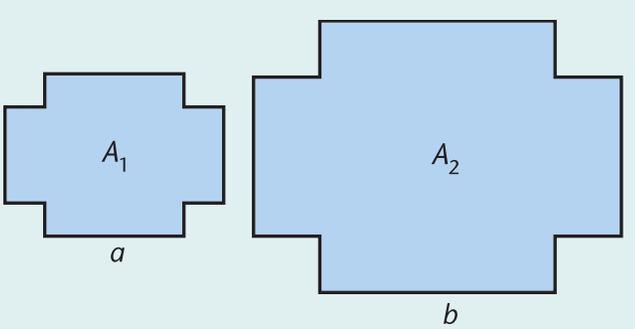
Pinta-alojen suhde on siis mittakaavan neliö.

Tämä pitää paikkansa kaikille yhdenmuotoisille kuvioille.

Pintasuhde

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde eli pinta-suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = k^2$$



ESIMERKKI 3 Päijänteen pinta-ala kartalla on 66 cm^2. Kuinka suuri on Päijänteen pinta-ala luonnossa, kun kartan mittakaava on 1 : 400 000?

RATKAISU Merkitään Päijänteen pinta-alaa luonnossa kirjaimella A.

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on yhtä suuri kuin mittakaavan neliö.

$$\frac{66\ \text{cm}^2}{A} = \left(\frac{1}{400\,000}\right)^2$$

$$\frac{66\ \text{cm}^2}{A} = \frac{1}{400\,000^2} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$A = 400\,000^2 \cdot 66\ \text{cm}^2 = 1{,}056 \cdot 10^{13}\ \text{cm}^2 = 1056\ \text{km}^2$$

VASTAUS Päijänteen pinta-ala on luonnossa 1100 km^2.

ESIMERKKI 4 Valokuvassa näkyvän suorakulmion muotoisen mainostaulun mitat ovat 4,0 cm × 2,0 cm. Saman mainostaulun pinta-ala luonnossa on 1,28 m^2. Laske valokuvan mittakaava.

RATKAISU Mainostaulun pinta-ala valokuvassa on
4,0 cm · 2,0 cm = 8,0 cm^2.

Yksikkömuunnokset s. 147

Muutetaan pinta-alat samaan yksikköön.
1,28 m^2 = 128 dm^2 = 12 800 cm^2

Muodostetaan pinta-alojen suhde ja supistetaan se ensin mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

$$\frac{8{,}0\ \text{cm}^2}{12\,800\ \text{cm}^2} \overset{(8}{=} \frac{1}{1600}$$

Pintasuhde on mittakaavan neliö, joten

$$k^2 = \frac{1}{1600}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{1600}}$$

$$k = \pm\frac{1}{40}$$

Mittakaava on aina positiivinen.

VASTAUS Valokuvan mittakaava on 1:40.

Tehtäviä

Mittakaava

34. Maikki piirsi suorakulmion muotoisesta huoneestaan pohjapiirroksen, jonka mittakaava oli 1:50. Laske huoneen mitat, kun ne ovat pohjapiirroksessa 7,6 cm × 5,8 cm.

35. Talon mallipiirustuksessa erään huoneen leveyden ja pituuden suhde on 4:7. Kuinka pitkä huone on, jos sen leveys on 6,0 m?

E1 36. Kuinka pitkä on 500 m pitkä polku kartalla, jonka mittakaava on 1 : 25 000?

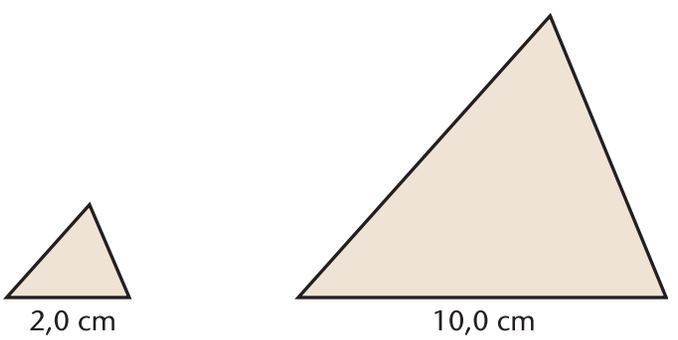
37. Jere seisoo valokuvassa patsaan vieressä. Jeren pituus kuvasta mitattuna on 4,0 cm, mutta todellisuudessa hänen pituutensa on 170 cm. Patsaan pituus kuvassa on 6,8 cm. Kuinka korkea patsas todellisuudessa on?

E2 38. Kartan sivu suurennetaan 1,6-kertaiseksi. Tällöin 5,0 km:n pituinen tie on suurennoksessa 25 cm pitkä. Määritä alkuperäisen kartan mittakaava.

39. Kartalla, jonka mittakaava on 1 : 400 000, erään valtatieosuuden pituus on 5,0 cm.
   a) Kuinka pitkä tämä matka on kartalla, jonka mittakaava on 1 : 150 000?
   b) Kuinka kauan autoilijoilta kuluu tähän osuuteen nopeudella 100 km/h?

Pinta-alojen suhde

E3 40. Laske suuremman kolmion pinta-ala, kun kolmiot ovat yhdenmuotoisia ja pienemmän kolmion ala on 2,5 cm^2.



41. Litran mehupullon korkeus on 25 cm ja kolmen litran 40 cm. Mehupullot ovat yhdenmuotoisia. Laske mehupullojen pinta-alojen suhde.

42. Valokuvanegatiivin koko on 24 mm × 36 mm. Negatiivista tehdyn suurennoksen pitempi sivu on 15 cm. Laske suurennoksen pinta-ala. [S1993, 3]

43. Yrityksen A ulkomainoksen korkeus on 2,5 m ja pinta-ala 8,0 m^2. Yritys B haluaa tehdä myös ulkomainoksen, joka on yhdenmuotoinen A:n mainoksen kanssa. Laske yrityksen B mainoksen korkeus, kun sen pinta-ala on 15 m^2.

E4 44. Huoneisto, jonka pinta-ala oli 96 m^2, oli esitteessä kooltaan 40 mm × 60 mm. Esitteessä olevan keittiön ala oli 3,0 cm^2. Mikä oli esitteen mittakaava ja mikä keittiön ala? [S1993, 7b]

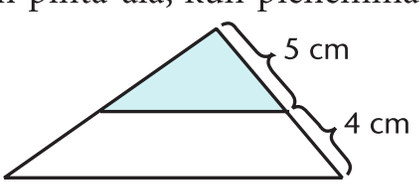
45. Talon pohjapiirros on piirretty mittakaavassa 1:50. Pohjapiirrosta pienennetään vielä kopiokoneella suhteessa 2:5. Talon alkuperäiset mitat ovat 13,5 m × 8,5 m.
   a) Laske talon pidemmän sivun pituus kopiokoneella pienennetyssä kuvassa.
   b) Laske alkuperäisen talon ja kopiokoneella pienennetyn kuvan pinta-alojen suhteen tarkka arvo.

Sekalaisia tehtäviä

46. Mikä on ilmakuvan mittakaava, kun 4,0 km pitkä tie on kuvassa 15 cm:n mittainen?

47. Puijon alueen ulkoilumaaston kartan mittakaava on 1 : 10 000. Mona mittasi kartalta maastossa olevan suunnilleen suorakulmion muotoisen luonnonlammen pituudeksi 2,6 cm ja leveydeksi 1,8 cm.
   a) Laske lammen todellinen pituus ja leveys.
   b) Laske pinta-alojen suhde ja sen avulla lammen todellinen pinta-ala.

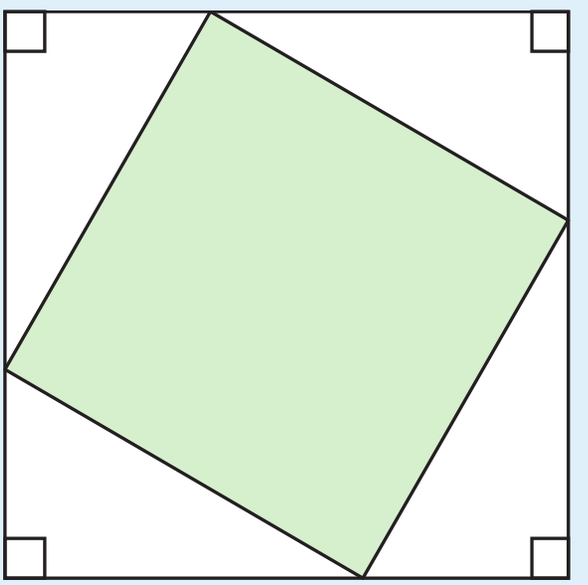
48. Kuvan kolmioiden kannat ovat yhdensuuntaiset. Laske suuremman kolmion pinta-ala, kun pienemmän kolmion pinta-ala on 15,0 cm^2.

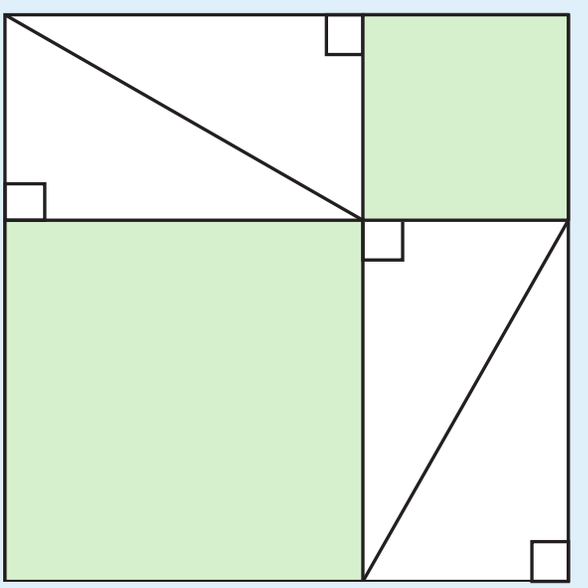


49. Suorakulmion muotoisen rakennuksen ulkomitat myyntiesitteessä ovat 40 mm × 25 mm. Luonnossa rakennuksen pohjapinta-ala on 360 m^2. Laske esitteen mittakaava. Mitkä ovat rakennuksen mitat luonnossa?

1.5 Pythagoraan lause

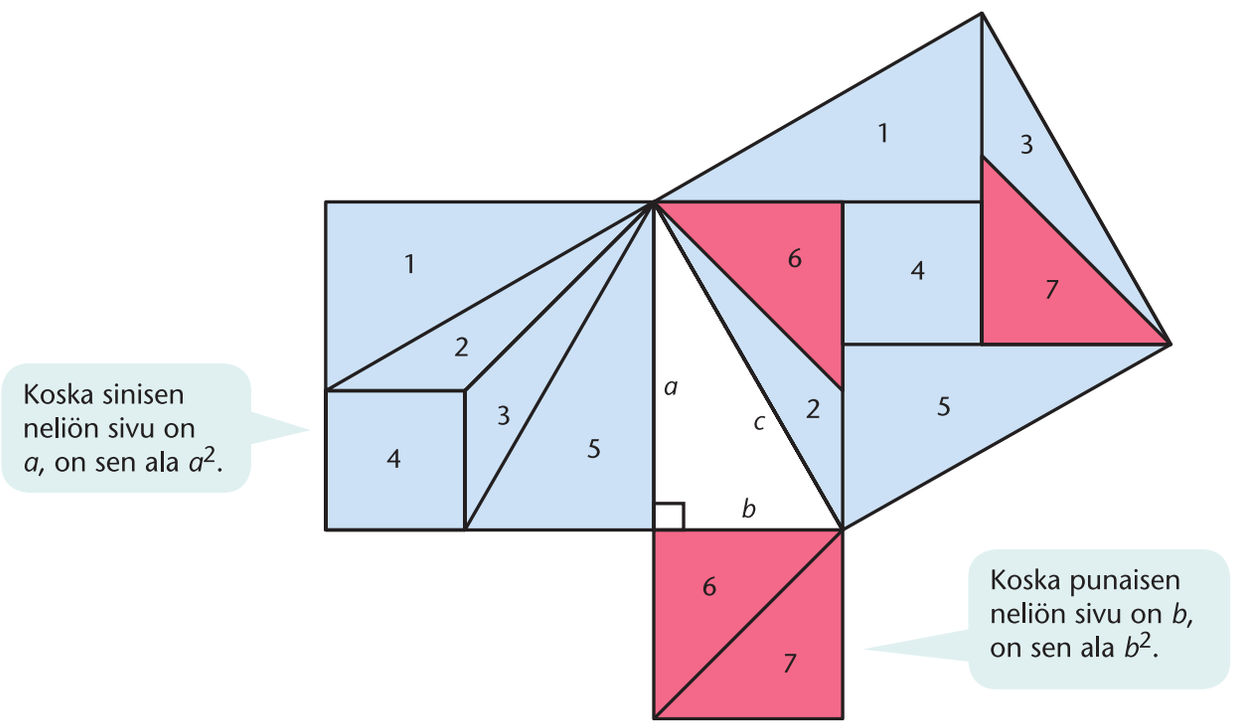
POHDINTA 1 Kuvioiden kaikki suorakulmaiset kolmiot ovat keskenään samanlaisia. Laske molempien kuvioiden värillisten neliöiden pinta-alat, kun suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat a ja b sekä hypotenuusan pituus c.



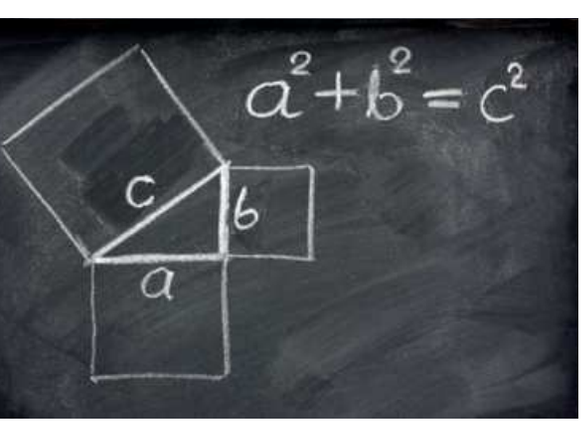


Pythagoras oli legendaarinen kreikkalainen matemaatikko ja filosofi. Hän lienee elänyt noin 570–500 eKr. Osan elämästään Pythagoras asui Egyptissä ja Babyloniassa. Näillä matkoillaan Pythagoras tutustui myös intialaisiin ja kiinalaisiin matemaatikoihin, joilta hän sai runsaasti vaikutteita.

Pythagoras tunnetaan parhaiten lauseesta, jonka mukaan suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusan pituuden neliö on yhtä suuri kuin kateettien pituuksien neliöiden summa. Pythagoraan lauseelle on myöhemmin löydetty satoja erilaisia todistuksia. Yksi niistä on luvun alussa pohdintatehtävänä. Lause voidaan perustella myös seuraavan ”palapelitodistuksen” avulla.



Valkoisen suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat a ja b. Hypotenuusan pituus on c.

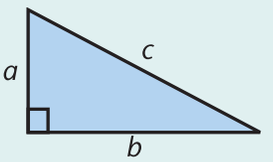


Suurin neliö on muodostunut siten, että kaksi pienempää neliötä on jaettu kolmioiksi ja neliöksi. Saadut palat on sitten koottu uudelleen eri tavalla.

Suuren neliön sivu on c, jolloin sen ala on c^2. Tämä ala on yhtä suuri kuin kahden pienemmän neliön alojen summa. Tästä seuraa, että $a^2 + b^2 = c^2$.

Pythagoraan lause

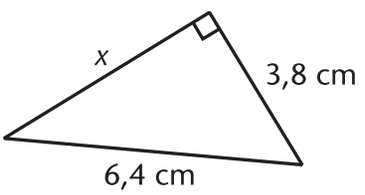
Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituuden neliö on kateettien pituuksien neliöiden summa, eli $a^2 + b^2 = c^2$.



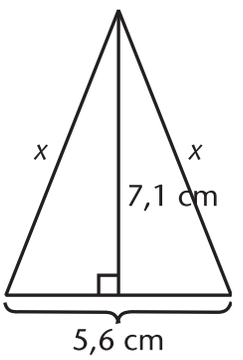
ESIMERKKI 1

Laske sivun x pituus.

a)



b)



RATKAISU

a) Kolmion kateetit ovat x ja 3,8 cm ja hypotenuusa 6,4 cm. Sijoitetaan nämä Pythagoraan lauseeseen.

Yksiköitä ei tarvitse merkitä mukaan yhtälöä ratkaistaessa, vaan yksikön voi liittää mukaan vasta vastausta annettaessa.

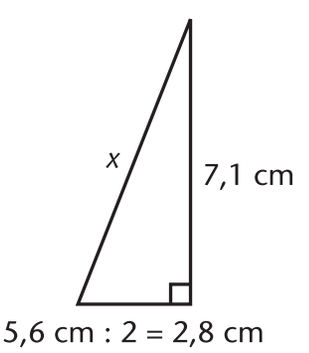
$$\begin{aligned} x^2 + 3{,}8^2 &= 6{,}4^2 \\ x^2 &= 6{,}4^2 - 3{,}8^2 \\ x^2 &= 26{,}52 \\ x &= \pm\sqrt{26{,}52} \\ x &= \pm 5{,}149\ldots \end{aligned}$$

Sivun pituus x on aina positiivinen, joten $x = 5{,}149\ldots$ cm $\approx 5{,}1$ cm.

b) Kolmio on tasakylkinen, joten korkeusjana puolittaa kannan. Korkeusjana jakaa alkuperäisen tasakylkisen kolmion kahdeksi samanlaiseksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Pythagoraan lausetta käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} x^2 &= 7{,}1^2 + 2{,}8^2 \\ x^2 &= 58{,}25 \\ x &= \pm\sqrt{58{,}25} \\ x &= \pm 7{,}632\ldots \end{aligned}$$



Sivun pituus x on aina positiivinen, joten $x = 7{,}632\ldots$ cm $\approx 7{,}6$ cm.

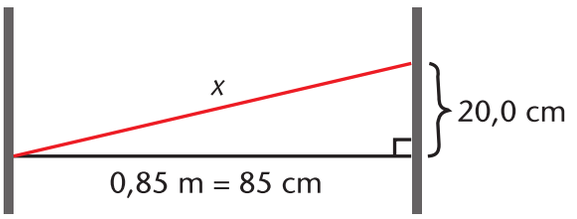
VASTAUS

a) 5,1 cm b) 7,6 cm

ESIMERKKI 2 Vaatekomeroon teetetty ylimääräinen hylly on liian pitkä. Kun hyllyn toinen reuna asetetaan kohdalleen, toinen reuna jää 20,0 cm korkeammalle. Kuinka paljon hyllyä on lyhennettävä, jotta se juuri ja juuri sopii 0,85 m leveään komeroon?

RATKAISU Piirretään tilanteesta mallikuva.

Merkitään hyllyn alkuperäistä pituutta kirjaimella x.



Käyttäen Pythagoraan lausetta saadaan:

$$x^2 = 85^2 + 20^2$$
$$x^2 = 7625$$
$$x = \pm\sqrt{7625}$$
$$x = \pm 87{,}32\ldots$$

Koska komeroon mahtuu vain 85 cm leveä hylly, on hyllyä lyhennettävä 87,32... cm − 85,0 cm = 2,32... cm ≈ 2,3 cm.

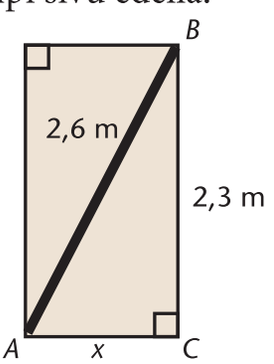
VASTAUS Hyllyä on lyhennettävä 2,3 cm.

ESIMERKKI 3 Rakennukseen varastoidaan lastulevyjä. Kuinka leveä varaston oviaukon tulee vähintään olla, jotta 2,6 m leveät lastulevyt mahtuvat sisään, kun oven korkeus on 2,3 m?

RATKAISU Lastulevy viedään oviaukosta vinottain, lyhyempi sivu edellä.

Merkitään oven leveyttä kirjaimella x.

Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta ABC ratkaistaan leveys x Pythagoraan lauseella.



$$x^2 + 2{,}3^2 = 2{,}6^2$$
$$x^2 + 5{,}29 = 6{,}76$$
$$x^2 = 6{,}76 - 5{,}29$$
$$x^2 = 1{,}47$$
$$x = \pm\sqrt{1{,}47} = \pm 1{,}21\ldots \approx \pm 1{,}2$$

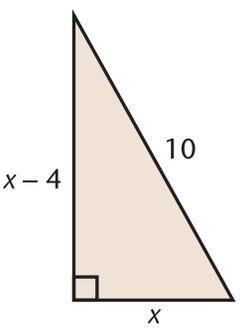
Oven leveys on aina positiivinen, joten $x = 1{,}2$.

VASTAUS Oviaukon leveyden tulee olla vähintään 1,2 m.

ESIMERKKI 4 Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 10 cm. Toinen kateetti on 40 mm lyhyempi kuin toinen. Laske kateettien pituudet.

RATKAISU Muunnetaan kaikki pituudet ensin senttimetreiksi: 40 mm = 4 cm.

Merkitään toista kateettia kirjaimella x.



Koska toinen kateetti on 4 cm lyhyempi, sen pituus on $x - 4$.

Tällöin Pythagoraan lauseen mukaan

$$x^2 + (x-4)^2 = 10^2$$
$$x^2 + (x-4)(x-4) = 100$$
$$x^2 + x^2 - 4x - 4x + 16 = 100$$
$$2x^2 - 8x + 16 - 100 = 0$$
$$2x^2 - 8x - 84 = 0$$

Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-84)}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{8 \pm \sqrt{736}}{4}$$
$$x = \frac{8 + \sqrt{736}}{4} = 8{,}78... \quad \text{tai} \quad x = \frac{8 - \sqrt{736}}{4} = -4{,}78...$$

Koska pituus on aina positiivinen, niin $x = 8{,}78... \approx 9$.

Toisen kateetin pituus on tällöin 9 cm – 4 cm = 5 cm.

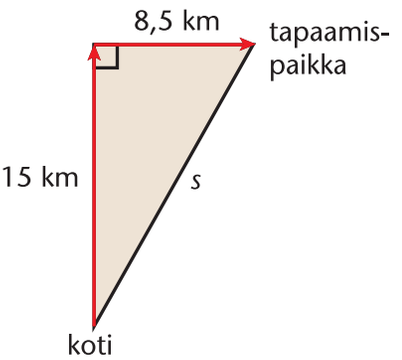
VASTAUS Pidempi kateetti on 9 cm ja lyhyempi 5 cm.

ESIMERKKI 5

Sisarukset Maikki ja Viola lähtevät polkupyörillä kotoa yhtä aikaa kohti tapaamispaikkaa. Maikki polkee ensin 15 km pohjoiseen ja sen jälkeen 8,5 km itään. Maikin keskivauhti matkalla on 22 km/h. Viola polkee suoraan tapaamispaikalle. Mikä Violan keskivauhdin on oltava, jotta hän saapuisi perille samaan aikaan kuin Maikki?

RATKAISU

Piirretään mallikuva.



Merkitään Violan kulkemaa matkaa kirjaimella s.

Tällöin Pythagoraan lauseen mukaan

$$s^2 = 15^2 + 8{,}5^2$$
$$s^2 = 225 + 72{,}25$$
$$s^2 = 297{,}25$$
$$s = \pm\sqrt{297{,}25} = \pm 17{,}24...$$

Koska matka on aina positiivinen, niin $s = 17{,}24...$

Maikin kulkema matka on yhteensä 15 km + 8,5 km = 23,5 km. Koska Maikin keskivauhti on 22 km/h, häneltä kuluu aikaa

$$\text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{vauhti}}$$

$$\frac{23{,}5 \text{ km}}{22 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1{,}068... \text{ h}$$

Viola käyttää matkaansa saman ajan. Hänen keskivauhtinsa on

$$\text{vauhti} = \frac{\text{matka}}{\text{aika}}$$

$$\frac{17{,}24... \text{ km}}{1{,}068... \text{ h}} = 16{,}14... \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

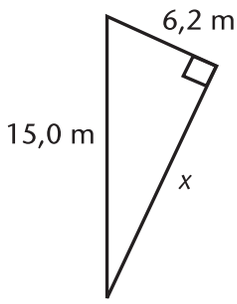
VASTAUS

Violan keskivauhdin on oltava $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

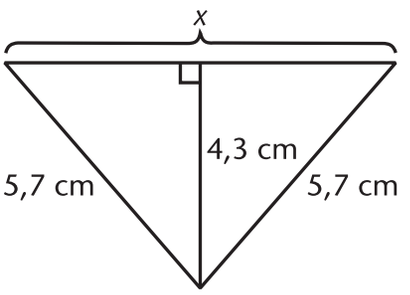
Tehtäviä

E1 50. Laske sivun x pituus.

a)

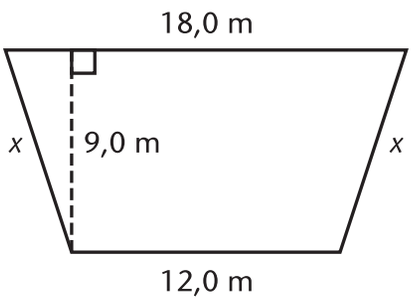


b)

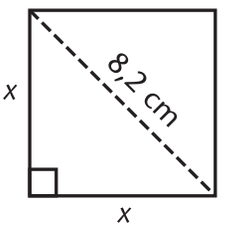


51. Laske sivun x pituus.

a)



b)



52. Tasakylkisen kolmion kylki on 40 cm ja korkeus 1,5 dm. Laske kolmion kannan pituus.

53. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 2,3 dm. Laske kolmion korkeus.

54. Talon ikkunoiden yläreuna on 3,4 m:n korkeudella. Seinän vieressä on 1,5 m leveä kukkapenkki. Miten pitkät tikkaat vähintään tarvitaan, että ne ylettyvät ikkunoiden yläreunaan?

E2 55. Leikkikentällä kasvava puu, jonka korkeus on 15,2 m, katkaistaan 6,1 m:n korkeudelta. Jos latvaosa kaatuu maahan irtoamatta tyviosasta, niin kuinka kauas tyviosasta latva osuu maahan?

56. Auditorion lattia nousee portaittain. Portaiden päälle on rakennettu ramppi. Pyörätuolilla pääsee ramppia pitkin kuudennelle portaalle. Portaiden korkeus on 17 cm ja syvyys 50 cm. Laske rampin pituus.

E3 57. Suorakulmion muotoisen kentän poikki kulkee suora polku lävistäjän suuntaisesti, kulmasta vastakkaiseen kulmaan. Miten pitkä polku on, kun kentän mitat ovat 150 m ja 0,27 km?

E4 58. Suorakulmaisen kolmion lyhyempi kateetti on 3,0 cm lyhyempi kuin toinen kateetti. Laske kateettien pituudet, kun hypotenuusa on 9,3 cm.

59. Suorakulmaisen kolmion kateettien suhde on 2:3. Laske kateettien pituudet, kun hypotenuusan pituus on 160 cm.

60. Järven suoralla rannalla on kaksi tähystyspaikkaa, joiden välinen etäisyys on 0,7 km. Vastakkaisella saarella oleva mökki näkyy molemmista paikoista katsottuna 60°:n kulmassa rantaviivaan nähden. Laske mökin kohtisuora etäisyys rannasta.

61. Huone on 4,0 m leveä, 6,5 m pitkä ja 3,5 m korkea. Kuinka pitkä matka on katon keskellä olevasta lampusta lattian etäisimpään nurkkaan (0,1 m:n tarkkuudella)? [K1986, 7a]

62. Ympyränmuotoisen lammikon keskellä on pystysuora tanko, jonka yläpää ulottuu 183 cm vedenpinnan yläpuolelle. Kun tanko taittuu pohjasta, se ylettyy lammikon reunalle siten, että yläpäästä on 76 cm ilmassa. Tangon alapää jää entiselle paikalleen. Kuinka syvä on lammikko, kun sen halkaisija on 5,5 m?

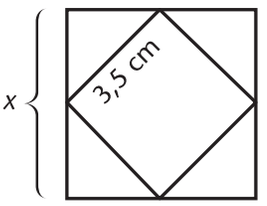
E5 63. Kaupunkien A ja B välillä on suora moottoritie, jonka pituus on 150 km. Kaupunkien välillä on myös junarata, joka kulkee kaupungin C kautta. Juna kulkee kaupungista A kaupunkiin C suoraan etelään 80 km ja jatkaa kaupungista C suoraan länteen, kunnes saapuu kaupunkiin B. Auto ja juna lähtevät kaupungista A yhtä aikaa. Kumpi kulkuvälineistä on ensin perillä kaupungissa B, kun auton keskivauhti on 100 km/h ja junan keskivauhti 130 km/h?

64. Purjehdusregatan yhden etapin aikana purjehdittiin aluksi koilliseen ja sen jälkeen 3,5-kertainen matka kaakkoon. Kuinka pitkä etappi oli, kun lähdön ja maalin välimatka oli 18 km?

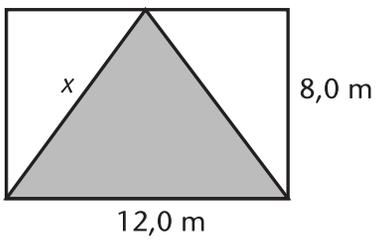
Sekalaisia tehtäviä

65. Laske sivun x pituus, kun

a) kuviot ovat neliöitä



b) värillinen kolmio suorakulmion sisällä on tasakylkinen.



66. Suorakulmion muotoisen paperin kahden sivun pituudet ovat 27 cm ja 0,57 m. Laske lävistäjän pituus.

67. Tasaisella maalla oleva lipputanko katkeaa myrskyssä 160 cm:n korkeudelta niin, että katkennut osa jää kiinni katkeamiskohdasta lipputangon tyviosaan. Kuinka kauas lipputangon juuresta lipputangon nuppi osuu, kun alkuperäisen lipputangon korkeus oli 18,0 m?

68. Merestä kohoava tulivuorisaari on likimain ympyräkartion muotoinen eli saaren poikkileikkaus on tasakylkinen kolmio. Saaren halkaisija on 1,2 km ja vuoren korkeus 450 m. Saaren rantaan saapuu tulivuoritutkija, joka kiipeää vuoren huipulle suorinta reittiä. Kuinka kauan hänen matkansa kestää, kun hänen keskinopeutensa on 0,8 km/h?

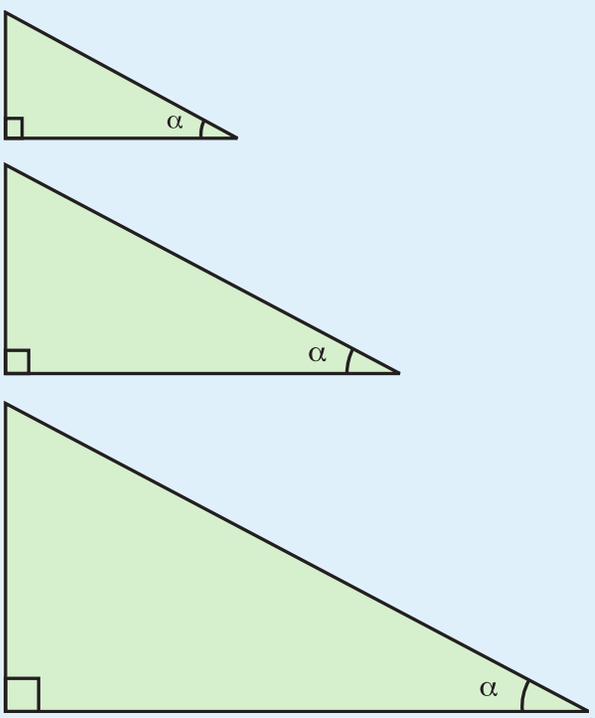
69. Tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoisesta 0,75 m korkeasta rakennuslevyn palasesta sahataan yhtä korkea, mahdollisimman suuri suorakulmio. Laske sen sivujen pituudet, kun puolisuunnikkaan kyljet ovat $5x$ ja muut sivut $6x$ ja $2x$.

1.6 Suorakulmaisen kolmion trigonometria

POHDINTA 1

Mittaa kolmioista kulman α suuruus sekä kulmien viereisten sivujen ja hypotenuusan pituudet.

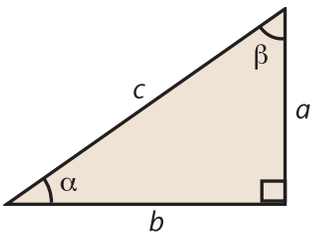
Taulukoi mittaustulokset ja laske niiden pohjalta jokaiselle kolmiolle kulman viereisen sivun ja hypotenuusan suhde. Analysoi lyhyesti tuloksiasi.



Trigonometrian historia alkaa jo ennen ajanlaskumme alkua. Antiikin Kreikan matemaatikot yrittivät (ja lopulta onnistuivatkin) laskea maan ja kuun välisen etäisyyden kolmioita hyväksi käyttäen. Jo vuonna 150 eKr. Hipparkhos kirjoitti taulukon sinin arvoista. Trigonometrian soveltamismahdollisuudet esimerkiksi merenkulussa, maanmittauksessa ja tähtitieteessä havaittiin nopeasti.

Sini, kosini ja tangentti

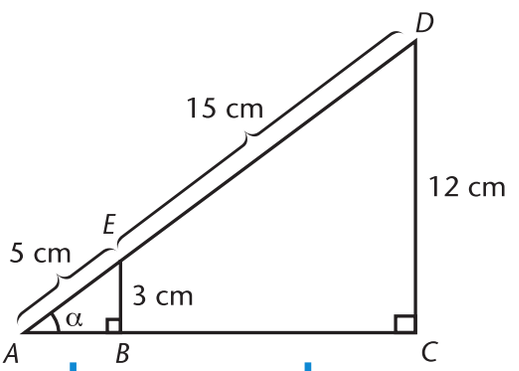
Kateetti b on kulman α oikeana kylkenä. Sitä kutsutaankin kulman α **viereiseksi kateetiksi**. Sivu a on puolestaan kulman α **vastainen kateetti**.



Vastaavasti kulman β viereinen kateetti on sivu a ja vastainen kateetti sivu b. Sivu c on hypotenuusa.

Tarkastellaan kolmioita ACD ja ABE.

Kulma α on kolmioille yhteinen. Lasketaan molemmille kolmioille kulman α vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde.



Kolmio *ACD*

$$\frac{\alpha\text{:n vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}} = \frac{CD}{AD} = \frac{12\text{ cm}}{5\text{ cm} + 15\text{ cm}} = 0{,}6$$

Kolmio *ABE*

$$\frac{\alpha\text{:n vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}} = \frac{BE}{AE} = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}6$$

Laskettu suhde on molemmille kolmioille sama. Tätä suhdetta kutsutaan kulman α **siniksi**.

Kulman vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhteen lisäksi suorakulmaiselle kolmiolle voidaan määritellä muidenkin sivujen suhteita.

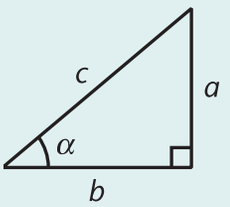
- Kulman α **kosini** on kulman viereisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde.
- Kulman α **tangentti** on kulman vastaisen ja viereisen kateetin pituuksien suhde.

Trigonometriset funktiot

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

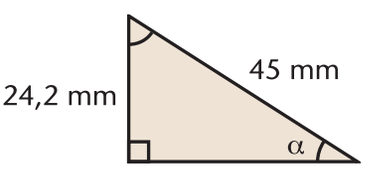
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$



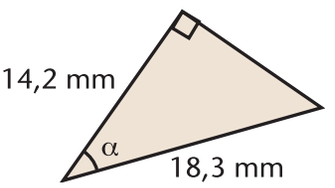
ESIMERKKI 1

Laske kulman α suuruus asteen tarkkuudella.

a)



b)



RATKAISU

a) Koska kulman α vastaisen kateetin pituus on 24,2 mm ja hypotenuusan pituus 45 mm, niin kulma α voidaan laskea sin α:n avulla

$$\sin\alpha = \frac{24{,}2\text{ mm}}{45\text{ mm}} = \frac{24{,}2}{45} = 0{,}53777...$$

Kulma α saadaan laskimella toiminnolla $\sin^{-1}$.

Huomaa, että laskimen on oltava **DEG**-tilassa, kun lasket asteilla.

$$\alpha = 32{,}53...^\circ \approx 33^\circ$$

b) Kulman α viereinen sivu on 14,2 mm ja hypotenuusa on 18,3 mm.

Kulma voidaan määrittää siis kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{14{,}2\text{ mm}}{18{,}3\text{ mm}} = \frac{14{,}2}{18{,}3} = 0{,}775\,956...$$

Laskimella saadaan arvo kulmalle α.

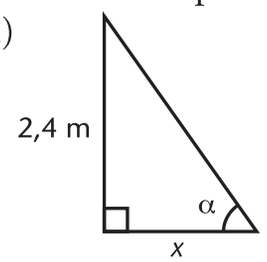
$$\alpha = 39{,}108...^\circ \approx 39^\circ$$

VASTAUS

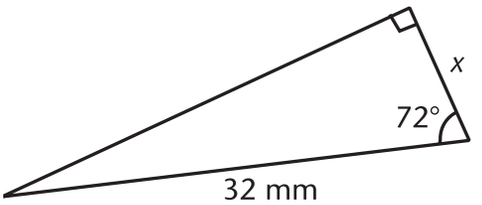
a) $\alpha = 33^\circ$ b) $\alpha = 39^\circ$

ESIMERKKI 2 Laske sivun x pituus.

a)



b)



RATKAISU a) 55°:n kulman vastaisen sivun pituus on 2,4 m ja viereisen sivun pituus x. Näiden sivujen pituuksien suhde on kulman α tangentti.

Tapa 1

$$\tan 55° = \frac{2{,}4}{x} \quad | \cdot x$$

$$x \cdot \tan 55° = 2{,}4 \quad | : \tan 55°$$

$$x = \frac{2{,}4}{\tan 55°}$$

$$x \approx 1{,}7$$

Tapa 2

Kerrotaan ristiin.

$$\frac{\tan 55°}{1} = \frac{2{,}4}{x}$$

$$x \cdot \tan 55° = 2{,}4 \quad | : \tan 55°$$

$$x = \frac{2{,}4}{\tan 55°}$$

$$x \approx 1{,}7$$

b) 72°:n kulman viereisen sivun pituus on x ja hypotenuusan pituus 32 mm. Sivujen pituuksien suhde on siis kosini.

$$\cos 72° = \frac{x}{32} \quad | \cdot 32$$

$$32 \cdot \cos 72° = x$$

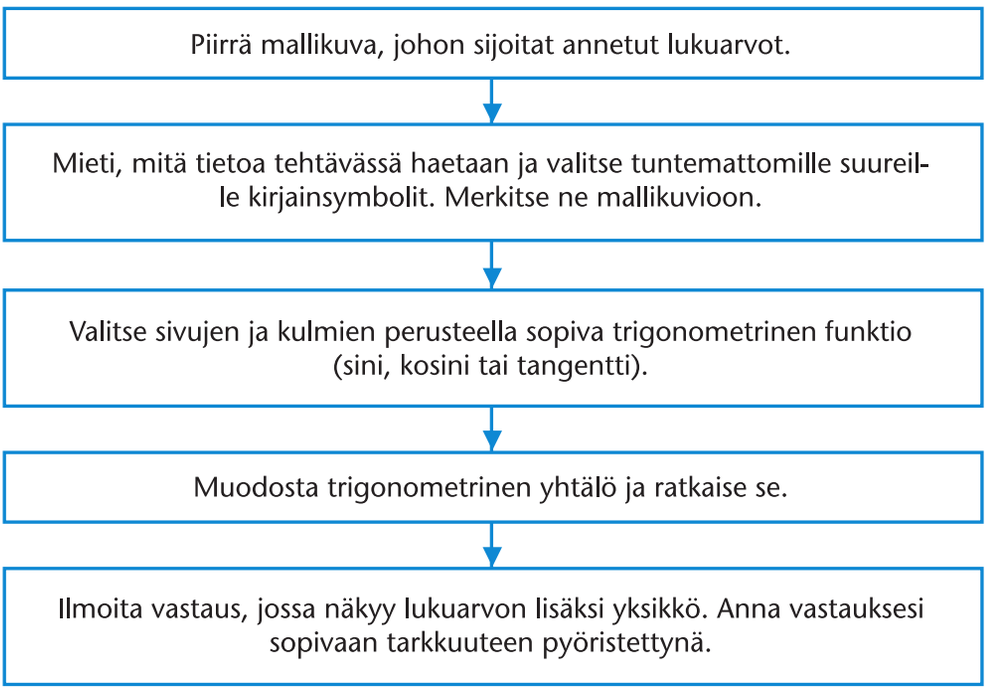
$$x = 9{,}8885...$$

$$x \approx 9{,}9$$

VASTAUS a) 1,7 m b) 9,9 mm

Trigonometrian probleemat

Jos geometrian ongelmatilannetta voidaan mallintaa suorakulmaisella kolmiolla, niin ratkaisussa voidaan käyttää usein apuna trigonometriaa. Tehtävässä kannattaa edetä seuraavasti:

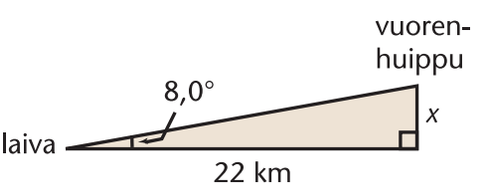


ESIMERKKI 3

Merellä seilaavasta laivasta nähdään saaren vuorenhuippu 8,0°:n kulmassa. Tutkan mukaan etäisyys rantaan on noin 22 km. Kuinka korkea vuori on?

RATKAISU

Piirretään tilanteesta mallikuva.



Merkitään vuoren korkeutta kirjaimella x.

Annetun kulman vastaisen sivun pituus on x ja viereisen sivun pituus 22 km.

Sopiva trigonometrinen funktio on tangentti.

$$\tan 8{,}0° = \frac{x}{22}$$
$$x = 22 \cdot \tan 8{,}0°$$
$$x = 3{,}09...$$

VASTAUS

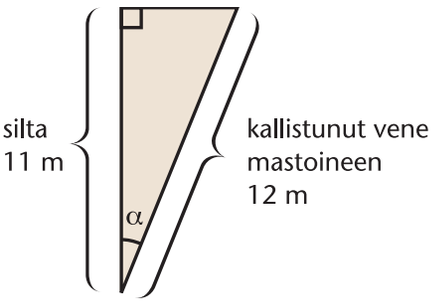
Vuori on noin 3,1 km korkea.

ESIMERKKI 4

Purjeveneen ja maston yhteenlaskettu korkeus on 12 m. Kuinka monta astetta venettä on kallistettava, jotta se mahtuu alittamaan 11 m korkean sillan?

RATKAISU

Tilannetta voidaan havainnollistaa suorakulmaisella kolmiolla, jonka kateettina on sillan korkeus.



Merkitään kallistumiskulmaa kirjaimella α.

Kulma voidaan ratkaista kosinin avulla

$$\cos\alpha = \frac{11\text{ m}}{12\text{ m}} = \frac{11}{12}$$

Kulma α saadaan laskimella.

$$\alpha = 23{,}556...^\circ \approx 24^\circ$$

VASTAUS

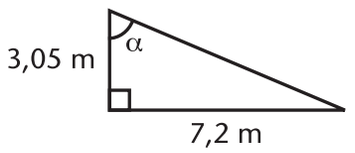
Venettä on kallistettava 24°.

Tehtäviä

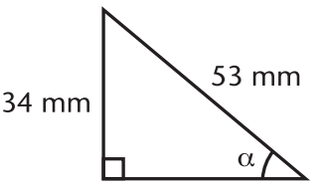
Sini, kosini ja tangentti

E1 70. Kuinka suuri on kulma α?

a)

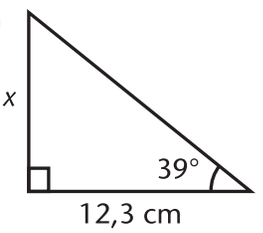


b)

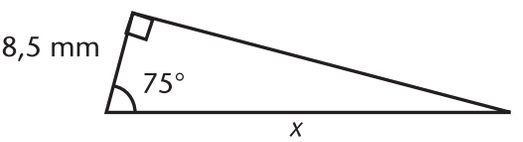


E2 71. Laske sivun x pituus.

a)

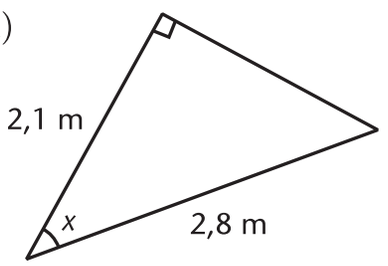


b)

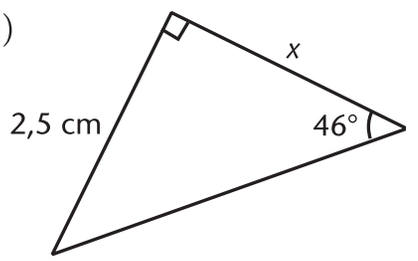


72. Ratkaise x.

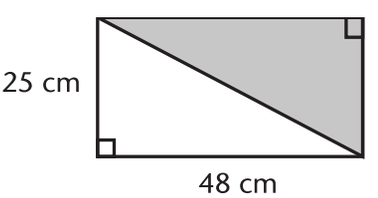
a)



b)

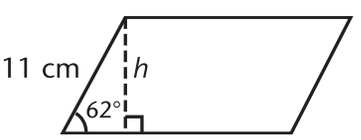


73. Suorakulmion sivut ovat 25 cm ja 48 cm. Laske väritetyn kolmion kulmat.

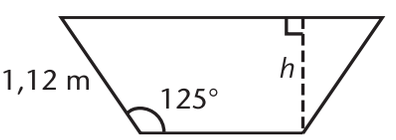


74. Laske nelikulmioiden korkeus h, kun nelikulmio on

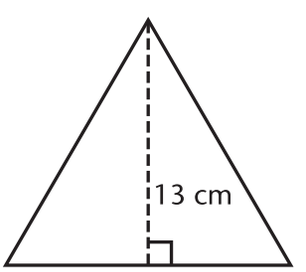
a) suunnikas



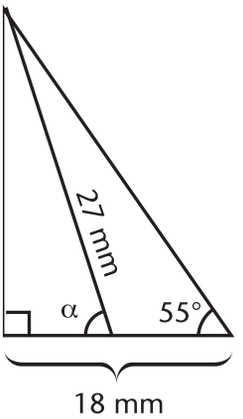
b) tasakylkinen puolisuunnikas.



75. Tasasivuisen kolmion korkeus on 13 cm. Laske kolmion sivun pituus.

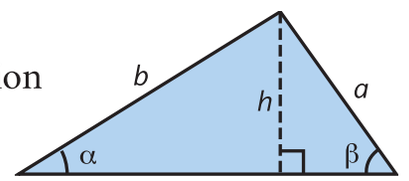


76. Laske kulma α asteen tarkkuudella.

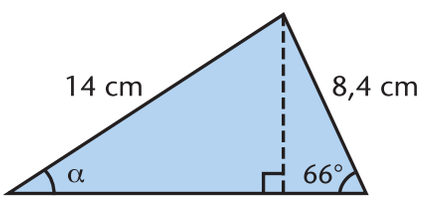


77. Todista viereisen kolmion avulla, että $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$. (Ohje: lausu kolmion korkeus h kahdella eri tavalla.)

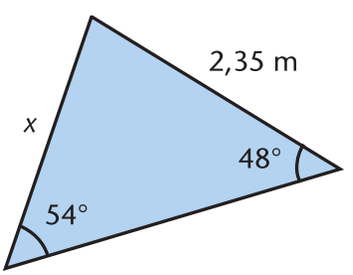
Mitä on tällöin $\frac{a}{b}$?



78. Ratkaise edellisen tehtävän avulla kulma α.



79. Laske kolmiosta sivun x pituus. (Ohje: katso tehtävä 77.)



Trigonometrian probleemat

80. Laske suorakulmaisen kolmion terävät kulmat, kun
a) lyhyemmän kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde on 1:5
b) kateettien pituuksien suhde on 3:4.

81. Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on 25°. Tämän kulman vastaisen kateetin pituus on 1,2 dm. Laske toisen kateetin ja hypotenuusan pituus.

82. Tasakylkisen kolmion kanta on 18 mm ja huippukulma on 34°. Kuinka suuret ovat kantakulmat? Laske kolmion kylkien pituudet.

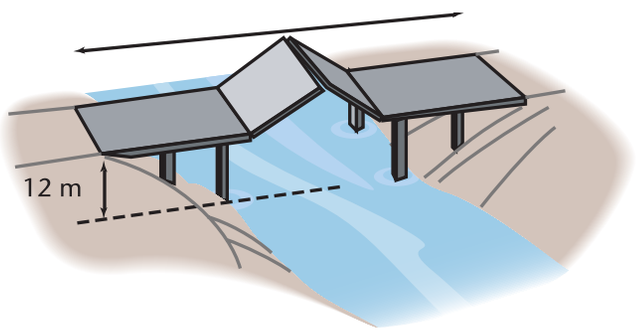
83. Tasasivuisen kolmion piiri on 24,0 cm. Laske kolmion korkeus.

E3 84. Auringonsäteet muodostavat 23°:n kulman maanpinnan kanssa. Kuusen varjon pituus on 18 m. Kuinka korkea puu on?

85. Järven rannalle on rakennettu mökki 50 m:n päähän rantaviivasta. Sateen johdosta tulva nostaa vedenpintaa 160 cm. Nouseeko vesi mökkiin asti, kun rannan kaltevuus on 1°?

E4 86. Harjakattoisen omakotitalon päädyn leveys on 8,6 m. Talon ullakkotilan korkeus katon harjan kohdalla on 1,8 m. Laske katon kaltevuuskulma.

87. Joen kapean kohdan yli on rakennettu kuvan mukainen nostosilta. Sillan korkeus on 12 m. Sillan ollessa auki korkein kohta on 16 m:n korkeudessa. Kuinka monen asteen kulmaan liikkuvat osat voidaan nostaa, kun sillan kokonaispituudesta 32 m nostettavien osien pituus on 30 %?



88. Laskettelurinteen kaltevuuskulma on 6,1° ja rinteen korkeus on 160 m. Ankkurihiihtohissin nopeus on 22 km/h. Kuinka kauan kestää hissimatka huipulle?

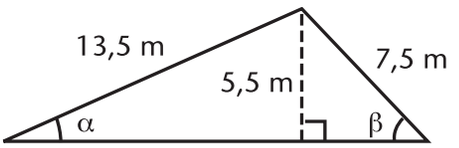
89. Kaksi laivaa lähestyy majakkaa. Molemmat laivat ovat 8,5 km:n etäisyydellä majakasta. Majakan juurelta katsottuna laivat muodostavat majakan kanssa 110°:n kulman.
a) Mikä on laivojen välinen etäisyys tällä hetkellä?
b) Mikä on laivojen välinen etäisyys 5 minuutin kuluttua, kun molempien laivojen nopeus on 65 km/h?

90. Merellä olevasta veneestä katsottuna korkealla kalliolla olevan tornin huippu näkyi 16°:n kulmassa ja kallion yläreuna 14°:n kulmassa merenpintaan nähden. Laske tornin korkeus, kun laivan etäisyys kalliosta oli 0,30 km.

91. Maanpintaa kuvaavan vaakatason pisteestä A näkyy 100 m korkea torni 3°:n kulmassa. Toisesta tason pisteestä B torni näkyy 4°:n kulmassa Määritä pisteiden A ja B välimatka, kun sekä torni että molemmat pisteet ovat samalla suoralla. [K1990, 5a]

Sekalaisia tehtäviä

92. Laske kolmion kantakulmat α ja β.



93. Maikki seisoo 1,4 km:n päässä radiomastosta. Hän näkee maston tornin 13°:n kulmassa. Kuinka korkea radiomasto on?

94. Kuinka monta astetta Pisan torni on kallistunut, kun tornin korkeus on 55 m ja kallistuma 4,3 m?

95. Itä-länsisuuntaisen kadun leveys on 15 m. Sen molemmin puolin on 18 m korkeat talot. Etelästä paistavan auringon säteet muodostavat 40°:n kulman vaakatasoon nähden. Osuvatko auringonsäteet kadun pohjoispuolella olevaan ikkunaan, jonka yläreuna on 4,0 m:n korkeudella kadun pinnasta? [S1991, 5]

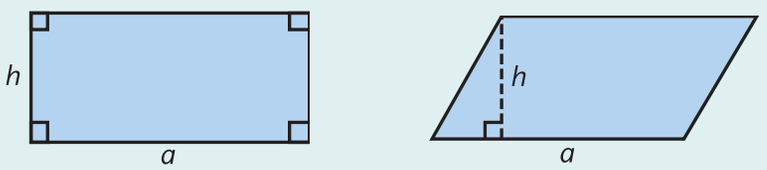
96. Purjehdittaessa näkyi majakka suoraan veneen edessä 2°:n kulmassa veden pintaan nähden. Kun oli edetty 250 m, se näkyi 3°:n kulmassa. Kuinka kaukana vene oli nyt majakasta ja mikä oli majakan korkeus? [S1998, 7a]

1.7 Pinta-aloja

Suorakulmiossa ja suunnikkaassa vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia ja yhtä pitkiä. Suorakulmiolta vaaditaan lisäksi, että sen kaikki kulmat ovat 90°. Suorakulmion ja suunnikkaan pinta-ala on kannan pituuden ja korkeuden tulo.

Suorakulmion ja suunnikkaan pinta-ala

$A = ah$



Erilaisia nelikulmioita s. 144

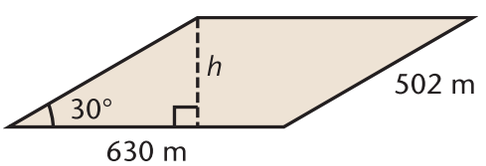
Neliö on suorakulmion erikoistapaus: sen kaikki sivut ovat yhtä pitkät. Jos neliön sivu on pituudeltaan a, sen pinta-ala on siis $A = a \cdot a = a^2$.

ESIMERKKI 1

Suunnikkaan erisuuntaisten sivujen pituudet ovat 502 m ja 630 m sekä näiden välinen kulma 30°. Laske suunnikkaan ala.

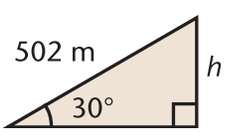
RATKAISU

Piirretään ensin mallikuva. Merkitään suunnikkaan korkeutta kirjaimella h.



Lasketaan suunnikkaan korkeus muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 30° = \frac{h}{502}$$
$$h = 502 \cdot \sin 30°$$
$$= 251$$



Suunnikkaan pinta-ala on

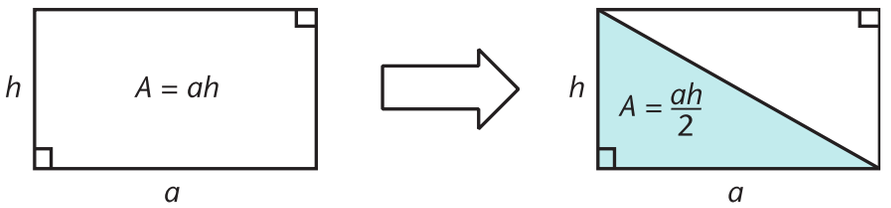
Yksikkömuunnokset s. 147

$$A = a \cdot h$$
$$= 630\ \text{m} \cdot 251\ \text{m}$$
$$= 158\,130\ \text{m}^2$$
$$\approx 16\ \text{ha}$$

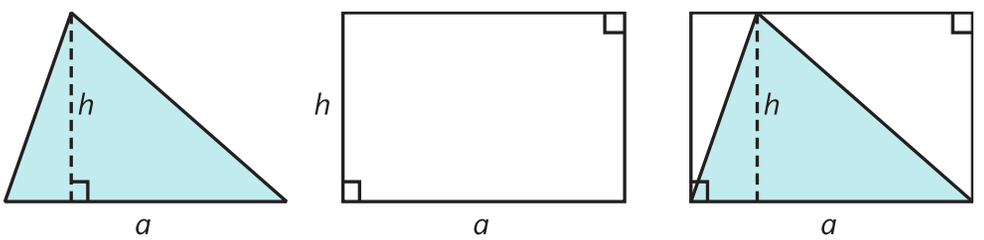
VASTAUS

Pinta-ala on 16 ha.

Suorakulmion lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen kolmioon. Koska suorakulmion ala on kannan ja korkeuden tulo, kolmion ala on puolet vastaavan suorakulmion alasta.



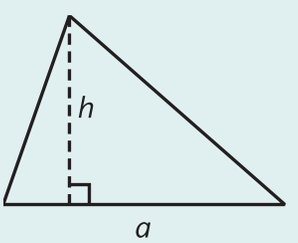
Kaikki kolmiot voidaan täydentää suorakulmioksi. Kolmion pinta-ala on silloin puolet tämän suorakulmion alasta.



Kolmion pinta-ala

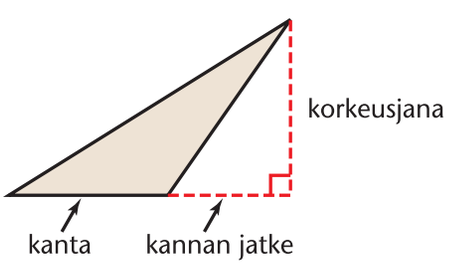
Jos kolmion kannan pituus on a ja korkeus on h, niin kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}ah$$



Erilaisia kolmioita s. 143

Jos kolmio on teräväkulmainen, sen korkeusjana voidaan piirtää huipusta kantaa vastaan. Tylppäkulmaisen kolmion korkeusjana on kannan jatkeelle kohtisuoraan piirretty jana.



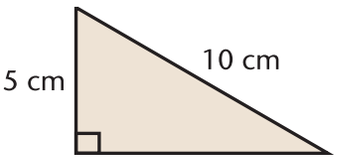
Monissa pinta-alaongelmissa kolmion korkeutta ei ole tehtävässä ilmoitettu vaan se täytyy ratkaista annettujen tietojen avulla. Useimmiten apuna käytetään

- trigonometrisia funktioita
- Pythagoraan lausetta
- yhdenmuotoisuutta.

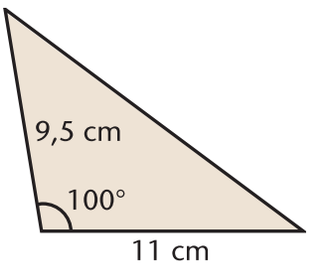
ESIMERKKI 2

Laske kolmioiden pinta-alat.

a)



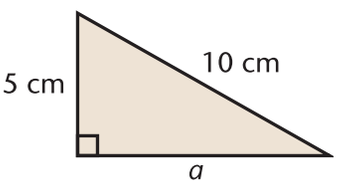
b)



RATKAISU

a) Lasketaan aluksi kolmion kannan pituus a Pythagoraan lauseella.

$$a^2 + 5^2 = 10^2$$
$$a^2 = 10^2 - 5^2$$
$$a^2 = 75$$
$$a = \pm\sqrt{75}$$



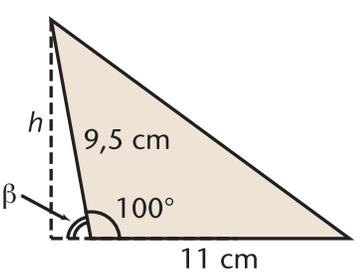
Koska sivun pituus on aina positiivinen, niin $a = \sqrt{75}$.

Näin ollen kolmion ala on

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{75}\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm}}{2} = 21{,}6506...\ \text{cm}^2 \approx 22\ \text{cm}^2$$

b) Kulma $\beta = 180° - 100° = 80°$.

Lasketaan kolmion korkeus h muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\sin\beta = \frac{h}{9{,}5} \qquad | \cdot 9{,}5$$
$$h = \sin 80° \cdot 9{,}5$$

Näin ollen kolmion pinta-ala on

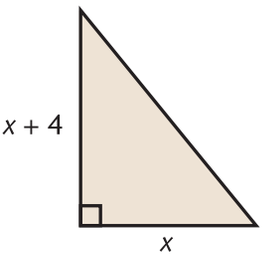
$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{11\ \text{cm} \cdot \sin 80° \cdot 9{,}5\ \text{cm}}{2} = 51{,}45...\ \text{cm}^2 \approx 51\ \text{cm}^2$$

VASTAUS

a) $22\ \text{cm}^2$ b) $51\ \text{cm}^2$

ESIMERKKI 3 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituusero on 4,0 cm. Laske kateettien pituudet, kun kolmion ala on 198 cm^2.

RATKAISU Merkitään toista kateettia kirjaimella x.
Tällöin toinen kateetti on $x + 4$.



Pinta-alan lauseke on $\frac{x \cdot (x+4)}{2} = \frac{x^2 + 4x}{2}$.

Koska kolmion pinta-ala on 198 cm^2, saadaan toisen asteen yhtälö

$$\frac{x^2 + 4x}{2} = 198 \qquad | \cdot 2$$
$$x^2 + 4x = 396$$
$$x^2 + 4x - 396 = 0$$

Ratkaistaan yhtälöstä x käyttäen toiseen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-396)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{1600}}{2}$$
$$x = \frac{-4 \pm 40}{2}$$
$$x = \frac{-4 + 40}{2} = 18 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4 - 40}{2} = -22$$

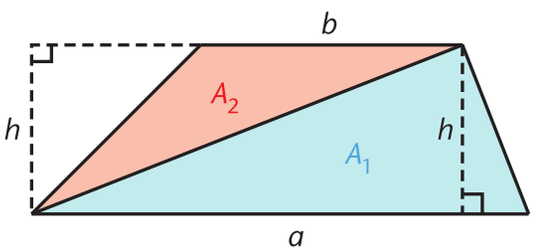
Koska pituus on aina positiivinen, ratkaisuksi kelpaa vain $x = 18$.
Toinen kateetti on tällöin 18 cm + 4 cm = 22 cm.

VASTAUS Kateettien pituudet ovat 18 cm ja 22 cm.

Kun puolisuunnikas jaetaan lävistäjällä kahteen osaan, saadaan kaksi kolmiota, joilla on sama korkeus h. Merkitään puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituuksia kirjaimilla a ja b. Tällöin toisen kolmion kannan pituus on a, toisen kannan pituus on b.

$$A_1 = \frac{ah}{2}$$

$$A_2 = \frac{bh}{2}$$

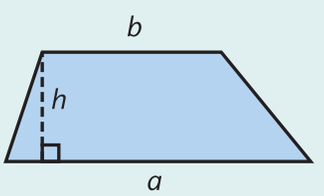


Puolisuunnikkaan pinta-ala on kolmioiden alojen summa:

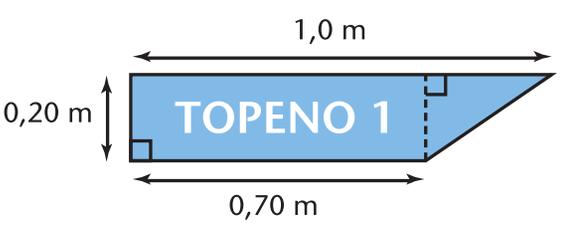
$$A = A_1 + A_2 = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{ah + bh}{2} = \frac{h(a+b)}{2}$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala

$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$



ESIMERKKI 4 Laske kuvassa olevan merkin ala.



RATKAISU Merkki on puolisuunnikas, joten sen pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \frac{h(a+b)}{2} \\ &= \frac{0{,}20\ \text{m} \cdot (0{,}70\ \text{m} + 1{,}0\ \text{m})}{2} \\ &= \frac{0{,}20\ \text{m} \cdot 1{,}70\ \text{m}}{2} \\ &= 0{,}17\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

VASTAUS Merkin ala on $0{,}17\ \text{m}^2$.

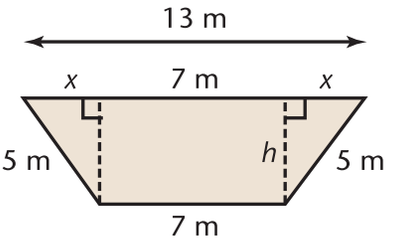
ESIMERKKI 5

Kanavan poikkileikkaus on tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoinen. Yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 13 m ja 7 m, ja kylkien pituus on 5 m. Laske poikkileikkauksen ala.

RATKAISU

Tasakylkinen puolisuunnikas voidaan jakaa suorakulmioksi ja kahdeksi samanlaiseksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Erilaisia nelikulmioita s. 144



Merkitään suorakulmaisen kolmion kantaa kirjaimella x.

Puolisuunnikkaan pidempi sivu on 13 m.

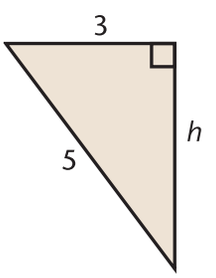
Toisaalta pidempi sivu on $x + 7 + x$, joten

$$\begin{aligned} x + 7 + x &= 13 \\ 2x &= 6 \quad | : 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Suorakulmaisen kolmion kanta on 3 m.

Lasketaan kanavan syvyys h suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} h^2 + 3^2 &= 5^2 \\ h^2 &= 5^2 - 3^2 \\ h^2 &= 16 \\ h &= 4 \quad \text{tai} \quad h = -4 \end{aligned}$$



Korkeus ei voi olla negatiivinen, joten $h = 4$.

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

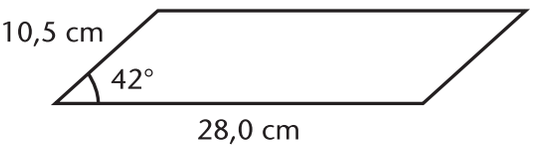
$$\begin{aligned} A &= \frac{h(a+b)}{2} \\ &= \frac{4\text{ m} \cdot (7\text{ m} + 13\text{ m})}{2} \\ &= \frac{4\text{ m} \cdot 20\text{ m}}{2} \\ &= 40\text{ m}^2 \end{aligned}$$

VASTAUS Kanavan poikkileikkauksen ala on 40 m^2.

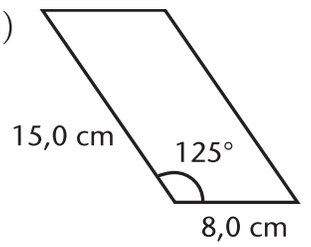
Tehtäviä

E1 97. Laske suunnikkaan pinta-ala.

a)

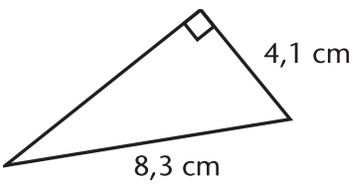


b)

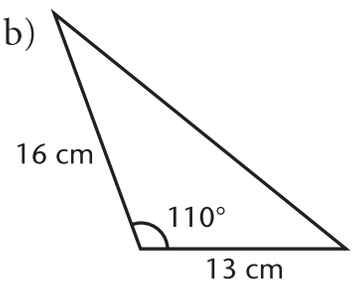


E2 98. Laske kolmioiden alat.

a)

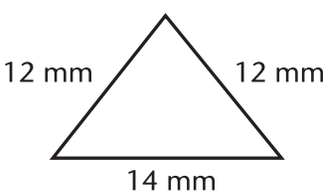


b)

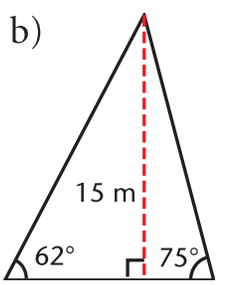


99. Laske kolmioiden alat.

a)



b)

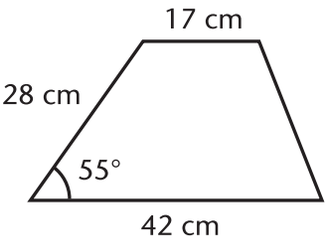


E4 100. Ojan poikkileikkaus on puolisuunnikkaan muotoinen. Ojan pohja on 80 cm leveä ja maan pinnalla ojan leveys on 2,5 m. Laske ojan poikkileikkauksen pinta-ala, kun ojan syvyys on 50 cm.

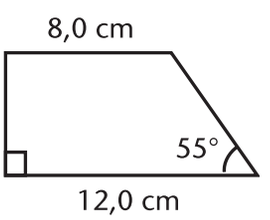
101. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 25 m. Toisen kateetin pituus on 19 m. Laske kolmion ala.

102. Laske puolisuunnikkaan pinta-ala.

a)



b)

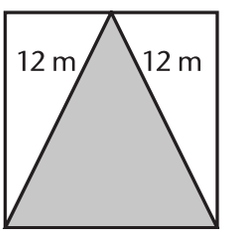


103. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 28 cm. Laske kolmion ala.

104. Tasakylkisen kolmion korkeus on 18 cm ja huippukulma 115°. Laske kolmion ala.

105. Finlandia 95 -postimerkin aiheena on leppäkerttu. Merkki on tasakylkinen kolmio, jonka kantakulmat ovat 45°. Laske merkin ala, kun kannan pituus on 5,0 cm.

106. Laske neliön ala, kun väritetty kolmio on tasakylkinen.



107. Risto askarteli neljäkkään muotoisen leijan. Neljäkkään sivun pituus on 23 dm ja sivujen välinen terävä kulma 65°. Laske leijan ala.

108. Tasakylkisen kolmion pinta-ala on 57 m^2. Kolmion korkeus on 18 m. Laske kannan pituus.

109. Kolmion ala on 65 dm^2 ja kanta on viisinkertainen korkeuteen verrattuna. Laske kolmion kanta ja korkeus.

E3 110. Suorakulmaisen kolmion kanta on 5,0 cm lyhyempi kuin kolmion korkeus. Laske kolmion kateettien pituudet, kun kolmion ala on 33 cm^2.

111. Suorakulmion piiri on 26 cm ja sen ala on 40,0 cm^2. Laske sivujen pituudet.

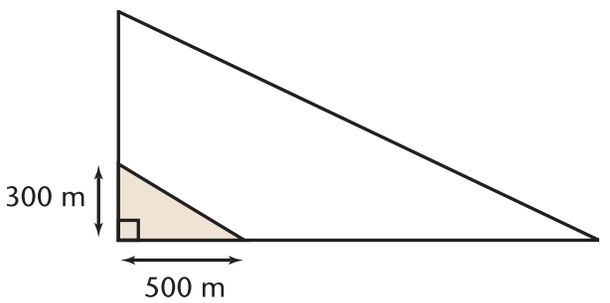
E5 112. Tasakylkisen puolisuunnikkaan $ABCD$ yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat: $AB = 10{,}0$ cm ja $DC = 7{,}0$ cm. Kyljen pituus on 4,1 cm. Laske puolisuunnikkaan ala.

113. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisista sivuista toinen on 2 m pidempi. Laske näiden sivujen pituudet, kun puolisuunnikkaan korkeus on 6 m ja pinta-ala 24 m^2.

114. Suunnikkaan sivut ovat 10 ja 12 ja ala 96. Laske suunnikkaan kulmat.

115. Puolisuunnikkaan yksi kulma on suora ja toinen 45°. Lyhyempi yhdensuuntaisista sivuista on pituudeltaan *a*. Pidemmän lävistäjän pituus on 4*a*. Määritä puolisuunnikkaan ala. [S1998, 8a]

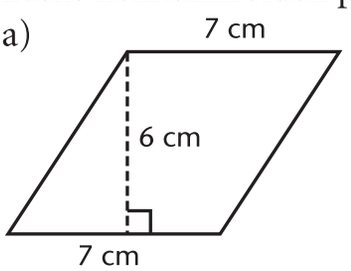
116. Pekka ja Väinö saavat perintönä suorakulmaisen kolmion muotoisen maapalan, jonka he jakavat testamentin mukaisesti. Kolmion kateettien pituudet ovat 1,9 km ja 900 m. Maapalasta erotetaan Väinölle suorakulmaisen kolmion muotoinen osa oheisen kuvan mukaisesti. Laske, montako prosenttia pienempi Väinön saama maapala on Pekan maapalaan verrattuna.



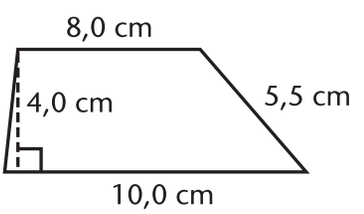
Sekalaisia tehtäviä

117. Laske nelikulmioiden pinta-alat.

a)



b)



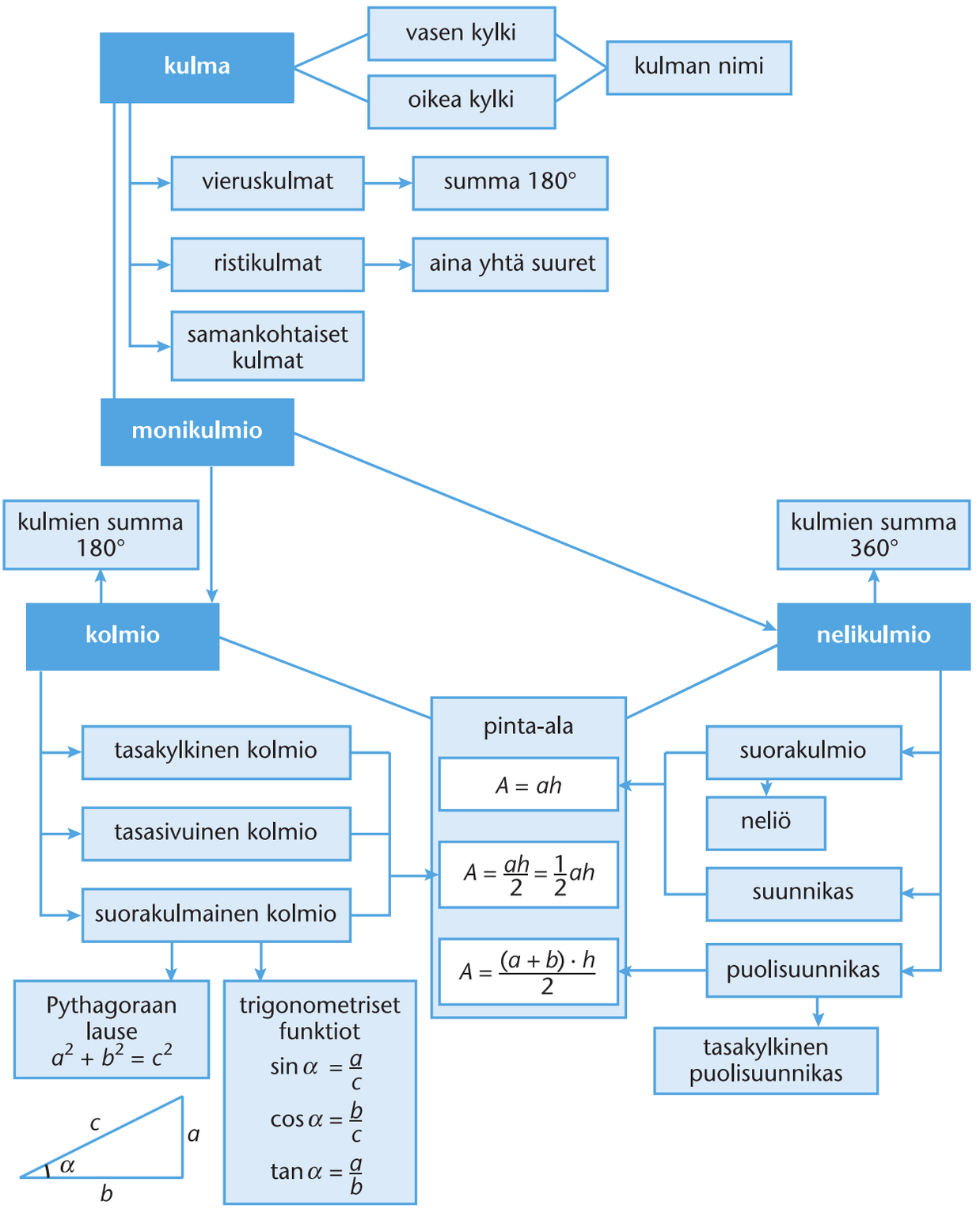
118. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 2,6 cm ja 5,8 cm. Laske kolmion pinta-ala, kun sivujen välinen kulma on 35°.

119. Tasakylkisen kolmion kanta on puolet kolmion korkeudesta. Laske kolmion sivujen pituudet, kun kolmion pinta-ala on 27,0 cm^2.

120. Suorakulmion kanta on 6,0 m lyhyempi kuin korkeus. Laske sivujen pituudet, kun suorakulmion ala on 216 m^2.

121. Neliön muotoiselle tontille rakennetaan suorakaiteen muotoinen talo, jonka pitempi sivu on puolet tontin sivusta ja lyhempi kolmasosa tontin sivusta. Piha-aluetta jää tällöin 400 m^2. Laske tontin pinta-ala. [S1995, 3b]

Keskeisiä käsitteitä

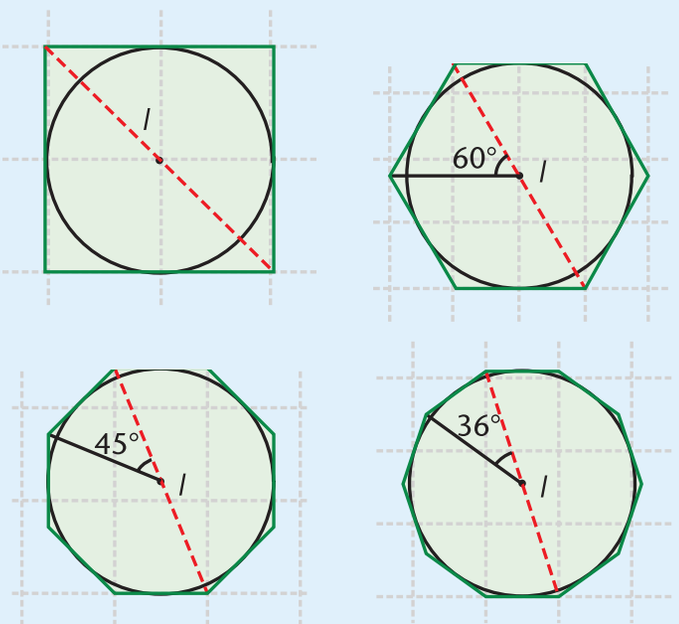


2 Ympyrä

2.1 Kehän pituus ja ala

POHDINTA 1

Kaikki alla olevat monikulmiot ovat säännöllisiä ja niiden sivujanojen pituus on 2. Monikulmioiden sisälle on piirretty suurin mahdollinen ympyrä. Määritä monikulmioiden lävistäjän l pituus. Täydennä taulukko ja vastaa kysymyksiin.



Kun n on parillinen, n-kulmion lävistäjän pituus l voidaan laskea kaavalla

$l = \frac{a}{\sin\beta}$, jossa

a = sivujanan pituus

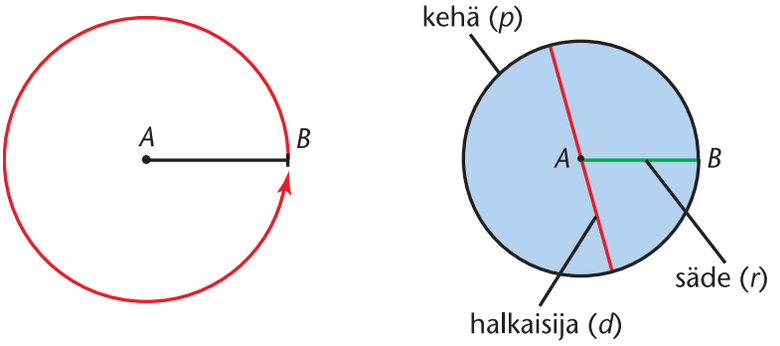
$\beta = \frac{360°}{2n}$

Monikulmio	Lävistäjän l pituus	Monikulmion piiri	$\frac{\text{piiri}}{\text{lävistäjä}}$
neliö			
6-kulmio			
8-kulmio			
10-kulmio			
30-kulmio			
40-kulmio			

a) Mitä arvoa piirin ja lävistäjän suhde lähestyy?
b) Miksi ympyrän kehän pituuden ja halkaisijan suhde lähestyy tätä edellä laskettua arvoa?

Ympyrän kehä

Yhdistetään tason kaksi pistettä A ja B janalla. Kierretään janaa päätepisteen A ympäri 360 astetta. Tällöin janan liikkuva päätepiste B piirtää tasoon ympyräviivan.



Yleensä ympyräviivasta käytetään nimitystä ympyrän **kehä** tai yksinkertaisesti **ympyrä**. Janan paikallaan pysyvää päätepistettä A kutsutaan ympyrän **keskipisteeksi**, janan toista päätepistettä B **kehäpisteeksi** ja janaa AB ympyrän **säteeksi**. Ympyrän **halkaisija** on kaksi kehäpistettä yhdistävä jana, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta. Kehää, halkaisijaa ja sädettä merkitään usein kirjaimilla p, d ja r.

Jo varhain huomattiin, että ympyrän kehän (p) ja halkaisijan (d) pituuksien suhde on aina sama luku riippumatta ympyrän koosta. Tätä päättymätöntä, jaksotonta desimaalilukua merkitään kreikkalaisella kirjaimella π ($\pi = 3{,}14\ldots$).

$$\frac{\text{kehän pituus}}{\text{halkaisijan pituus}} = \pi \quad \text{eli} \quad \frac{p}{d} = \pi$$

Tästä voidaan johtaa lauseke ympyrän kehän pituudelle, joka on halkaisijan ja π:n tulo eli $p = d \cdot \pi$. Halkaisija d voidaan ilmoittaa säteen avulla, $d = 2r$. Tällöin ympyrän kehän pituudeksi p saadaan $p = 2 \cdot \pi \cdot r$.

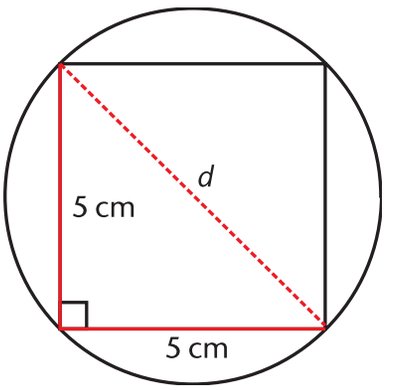
Ympyrän kehän pituus

$$p = d\pi = 2\pi r$$

ESIMERKKI 1 Ympyrän sisään on piirretty suurin mahdollinen neliö. Neliön piiri on 20 cm. Laske ympyrän kehän pituus.

RATKAISU

Piirretään mallikuva. Neliön lävistäjän pituus d on myös ympyrän halkaisijan pituus.



Neliön sivun pituus on $\frac{20\text{ cm}}{4} = 5\text{ cm}$.

Pythagoraan lauseen mukaan

$$d^2 = 5^2 + 5^2$$
$$d^2 = 50$$
$$d = \pm\sqrt{50} = \pm 7{,}071...$$

$p = d\pi$

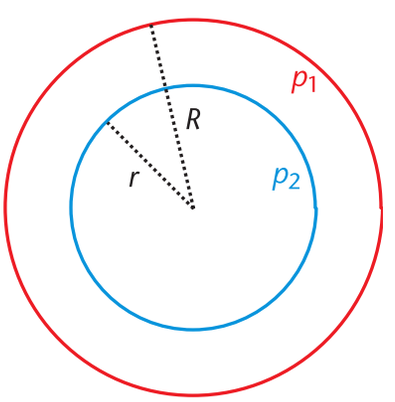
Kehän pituus on $7{,}071...\text{ cm} \cdot \pi = 22{,}214...\text{ cm} \approx 22\text{ cm}$.

VASTAUS Ympyrän kehän pituus on 22 cm.

ESIMERKKI 2 Yksi Saturnus-planeettaa ympäröivistä renkaista on nimeltään D-rengas. Se on himmeä, mutta leveä vyöhyke, jonka pituus sisäreunaa pitkin mitattuna on 420 000 km ja ulkoreunaa pitkin 470 000 km. Kuinka leveä D-rengas on?

RATKAISU

Rengasta voidaan mallintaa kahdella samankeskisellä ympyrällä. Lasketaan näiden ympyröiden säteet R ja r.



Kehän pituus
$p = 2\pi r \quad | : 2\pi$
$\frac{p}{2\pi} = r$

$$R = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{470\,000\text{ km}}{2\pi} = 74\,802{,}8...\text{ km}$$

$$r = \frac{p_2}{2\pi} = \frac{420\,000\text{ km}}{2\pi} = 66\,845{,}07...\text{ km}$$

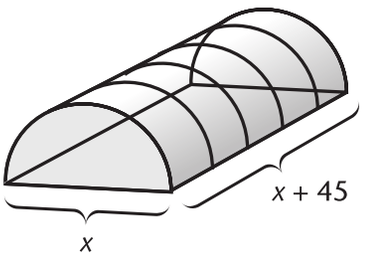
Koska säteet kuvaavat renkaiden etäisyyttä Saturnuksen keskipisteestä, renkaan leveys on niiden erotus:

$$74\,802{,}8...\text{ km} - 66\,845{,}07...\text{ km} \approx 7960\text{ km}$$

VASTAUS Renkaan leveys on 7960 km.

ESIMERKKI 3 Kasvihuoneen rautakehikon päädyt ovat puoliympyröitä ja kehikon pohjana on suorakulmio, jonka leveys on sama kuin puoliympyrän halkaisija. Kasvihuoneen pituus on 45 m suurempi kuin leveys. Laske puoliympyrän säde, kun kehikon yhteispituus on 160 m.

RATKAISU Merkitään puoliympyrän halkaisijaa kirjaimella x.



Puoliympyröistä muodostuu kokonainen ympyrä, jonka kehän pituus on πx.

Kehikon pituus on $x + 45$.

Pohjana olevan suorakulmion piiri on

$$x + x + (x + 45) + (x + 45) = 4x + 90$$

Kehikon yhteispituus on $(4x + 90) + \pi x = 4x + \pi x + 90$.

Koska yhteispituus on 160 m, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 4x + \pi x + 90 &= 160 \\ 4x + \pi x &= 70 \qquad \text{Otetaan } x \text{ yhteiseksi tekijäksi.} \\ (4 + \pi)x &= 70 \qquad \big| :(4 + \pi) \\ x &= \frac{70}{4 + \pi} = 9{,}8017\ldots \end{aligned}$$

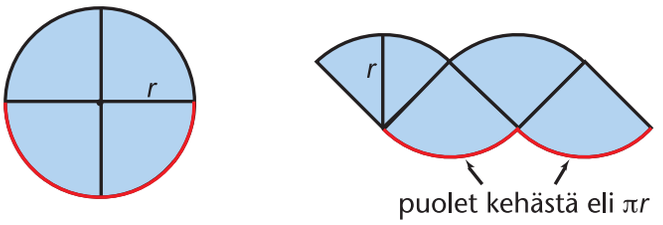
Säde on puolet halkaisijasta x eli

$$\frac{9{,}8017\ldots \text{ m}}{2} = 4{,}90\ldots \text{ m} \approx 4{,}9 \text{ m}$$

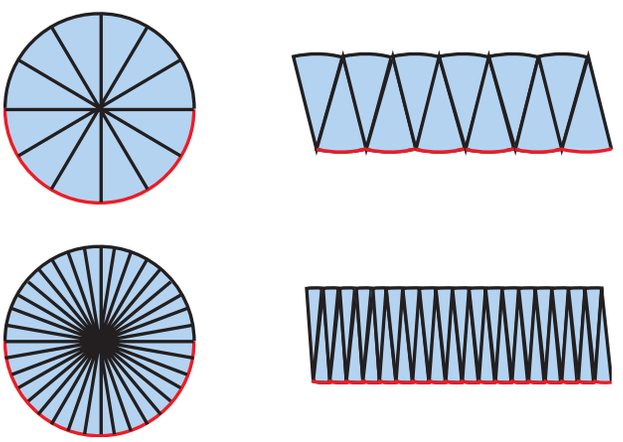
VASTAUS Säde on 4,9 m.

Ympyrän pinta-ala

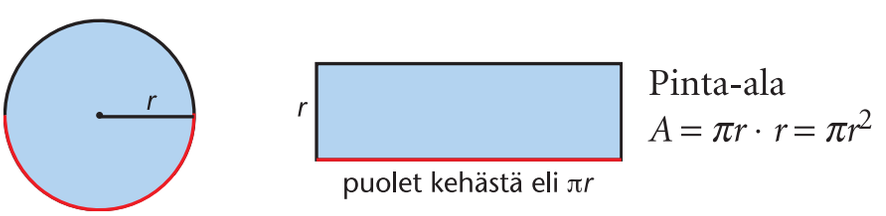
Ympyrän pinta-alan määrittämiseksi jaetaan ympyrä halkaisijoiden avulla yhtä suuriin sektoreihin. Siirretään sektorit vierekkäin kuvan mukaisesti.



Mitä useampiin sektoreihin ympyrä on jaettu, sitä enemmän vieretysten siirretyistä sektoreista muodostettu kuvio muistuttaa suorakulmiota.



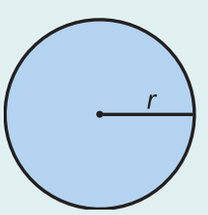
Jos piirtämällä voitaisiin jakaa ympyrä äärettömän moneen pieneen sektoriin ja siirtää sektorit vierekkäin, syntyisi suorakulmio, jonka korkeus on ympyrän säde (r) ja kanta puolet ympyrän kehästä (πr).



Tällöin ympyrän pinta-ala ja suorakulmion pinta-ala ovat yhtä suuret.

Ympyrän pinta-ala

$A = \pi r^2$



ESIMERKKI 4 Laske ympyrän pinta-ala, kun ympyrän
a) halkaisija on 5,0 cm
b) kehän pituus on 10,0 cm.

RATKAISU a) Säteen pituus on puolet halkaisijasta

$$r = \frac{5{,}0\text{ cm}}{2} = 2{,}5\text{ cm}$$

Pinta-ala on $A = \pi \cdot (2{,}5\text{ cm})^2 = 19{,}643...\text{ cm}^2 \approx 20\text{ cm}^2$.

b) Lasketaan ensin säteen pituus.

$p = 2\pi r \quad | : 2\pi$
$\frac{p}{2\pi} = r$

$$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{10{,}0\text{ cm}}{2\pi} = 1{,}591...\text{ cm}$$

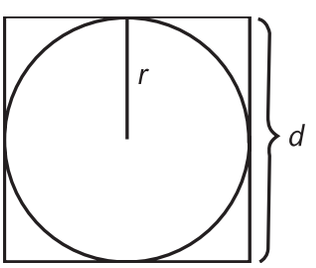
Käytä laskuissa tarkkaa arvoa.

Tällöin ala on $A = \pi \cdot (1{,}591...\text{ cm})^2 = 7{,}957...\text{ cm}^2 \approx 7{,}96\text{ cm}^2$.

VASTAUS a) 20 cm^2 b) 7,96 cm^2

ESIMERKKI 5 Ympyrän muotoisen pöytäliinan ala on 1,5 m^2. Liina on valmistettu pienimmästä mahdollisesta neliön muotoisesta kangaspalasta. Kuinka paljon kangasta meni hukkaan valmistuksessa?

RATKAISU Piirretään mallikuva. Jotta neliön ala voidaan laskea, on ensin ratkaistava neliön sivun pituus, joka on yhtä suuri kuin ympyrän halkaisija. Pöytäliinan ala on 1,5 m^2, joten



$$\pi r^2 = 1{,}5 \quad | : \pi$$
$$r^2 = \frac{1{,}5}{\pi}$$
$$r = \pm\sqrt{\frac{1{,}5}{\pi}} = \pm 0{,}690...$$

Säde on aina positiivinen, joten $r = 0{,}690...$ m.

Neliön sivun pituus on $d = 2r = 2 \cdot 0{,}690...\text{ m} = 1{,}3819...\text{ m}$.
Neliön ala on siis $d^2 = (1{,}3819...\text{ m})^2 = 1{,}909...\text{m}^2$.

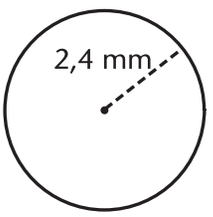
Hukkaan menneen kankaan määrä on
$1{,}909...\text{m}^2 - 1{,}5\text{ m}^2 \approx 0{,}41\text{ m}^2$.

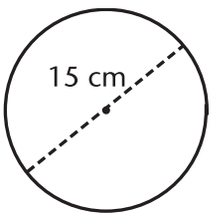
VASTAUS Kangasta meni hukkaan 0,41 m^2.

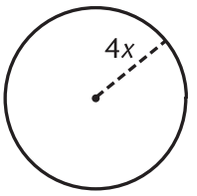
Tehtäviä

Ympyrän kehä

122. Laske ympyrän kehän pituus.

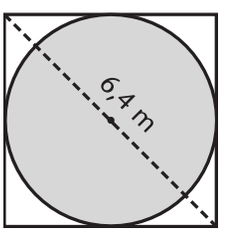
a) 

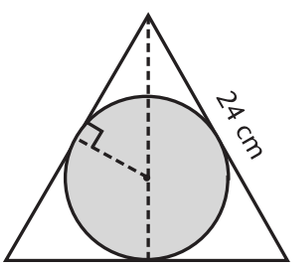
b) 

c) 

123. Laske ympyrän säteen pituus, kun kehä on
a) 86 m b) 1,5 cm.

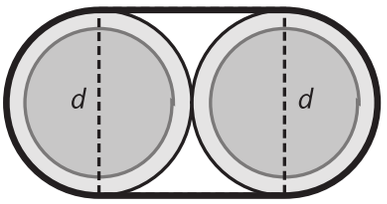
E1 124. Laske väritetyn ympyrän kehän pituus, kun ympyrän ympäri piirretyn
a) neliön lävistäjä on 6,4 m
b) tasasivuisen kolmion sivun pituus on 24 cm.





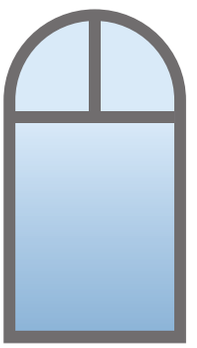
E2 125. Tikkataulun ulkoreunan pituus on 74,1 cm. Laske taulun keskiosan eli napakympin halkaisija, kun muiden numeroiden renkaan paksuus on 1,2 cm.

E3 126. Kahden telan ympärille on asetettu 2,8 m pitkä hihna. Kuinka suuri on telan pohjaympyrän halkaisija d, kun keskelle muodostuva nelikulmio on neliö?



127. Kaksi satelliittia kiertää Maata ympyränmuotoisilla radoilla. Toisen satelliitin rata on 150 km pidempi kuin toisen. Laske satelliittien korkeusero.

128. Kirkon kaari-ikkuna muodostuu suorakulmiosta ja puoliympyrästä. Laske ikkunan leveys ja korkeus korkeimmassa kohdassa, kun ikkunan piiri on 6,2 m. Suorakulmion korkeus on kaksi kertaa niin suuri kuin leveys.

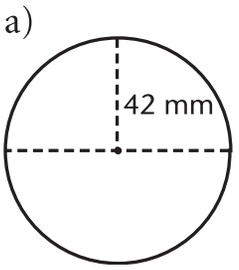


129. Kellohametta valmistettaessa tarvitaan kahden samakeskisen ympyräviivan rajoittama pala kangasta. Sisempi ympyrä muodostaa hameen vyötärön ja ulompi helman. Tytölle, jonka vyötärön ympärysmitta on 60 cm, halutaan ommella 60 cm pitkä kellohame. Kuinka leveää kankaan pitää vähintään olla, jotta siitä voitaisiin leikata hameeseen tarvittava ympyrärenkaan muotoinen pala? Saumavaroja ja päärmeitä ei tarvitse ottaa huomioon. [K1998, 5a]

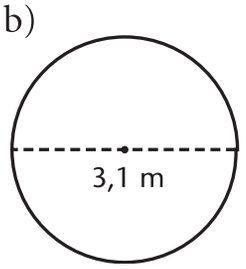
Ympyrän pinta-ala

130. Laske ympyrän pinta-ala.

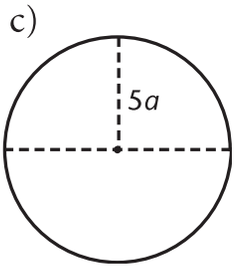
a)



b)



c)

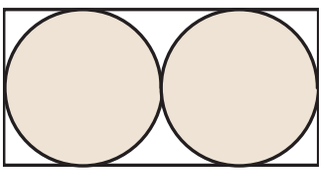


E4 131. Laske ympyrän ala, kun ympyrän
a) halkaisija on 12 m b) kehän pituus on 150 cm.

132. Laske ympyrän säde, kun ympyrän pinta-ala on
a) 144 mm^2 b) 16 ha.

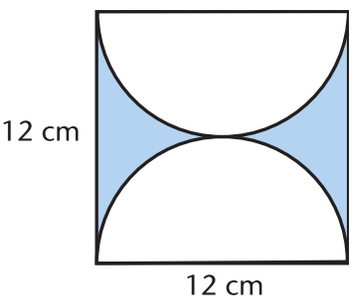
E5 133. Huonekaluja valmistava yritys on tilannut suorakulmion muotoisia levyjä. Yhdestä levystä valmistetaan kaksi mahdollisimman suurta ympyrän muotoista pöydän kantta tehtävän 134 kuvan mukaisesti. Yhden kannen ala on 2,0 m^2. Kuinka paljon levystä menee valmistuksessa hukkaan?

134. Suorakulmion sisään on piirretty kaksi yhtä suurta ympyrää. Kuinka monta prosenttia näiden ympyröiden ala on suorakulmion alasta?



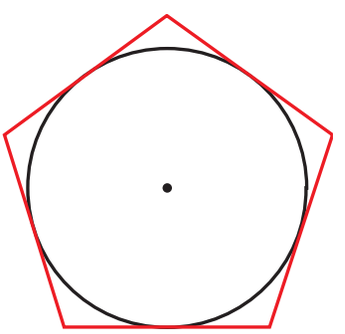
135. Ympyrän muotoisen pysäköintihallin halkaisija on 160 m. Yhden auton pysäköimiseen on varattava 6,0 m^2 tilaa. Lisäksi hallin pinta-alasta 10 % kuluu pysäköinnistä vapaisiin ajoreitteihin. Kuinka monta autoa pysäköintihalliin mahtuu?

136. Neliön sisällä on kaksi puoliympyrää. Kuinka monta prosenttia väritetyn alueen pinta-ala on koko kuvion pinta-alasta?



137. Nosturi voi liikkua suoria kiskoja pitkin 30 m ja kurottautua 20 m:n päähän. Kuinka suuri on nosturin saavuttama alue? (Vastaus 10 m^2:n tarkkuudella.) [S1989, 4]

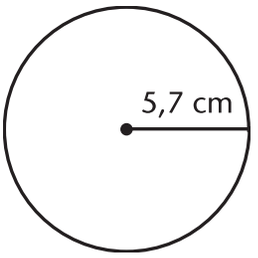
138. Säännöllisen 5-kulmion sivujanan pituus on 10 cm. Laske sen sisään piirretyn ympyrän
a) kehän pituus
b) pinta-ala.



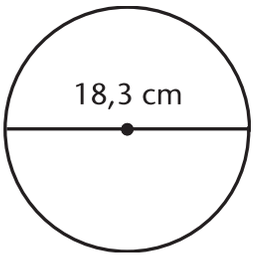
Sekalaisia tehtäviä

139. Laske kehän pituus ja pinta-ala.

a)

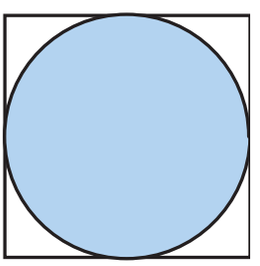


b)



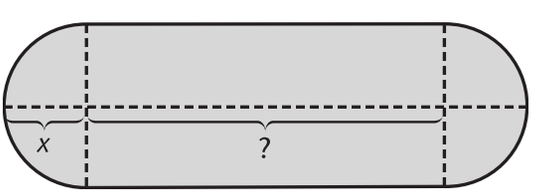
140. Likimain ympyrän muotoisen lammen ympärysmitta on 6,4 km. Kuinka kauan Maikilta kestää uida lammen poikki vastarannalle, kun hänen uintinopeutensa on 3,5 km/h?

141. Ympyrän ympäri piirretyn neliön pinta-ala on 68 cm^2. Laske valkoiseksi jäävän osan pinta-ala.



142. Kaupunki haluaa rakennuttaa omistamalleen suorakulmion muotoiselle tontille mahdollisimman suuren ympyrän muotoisen konserttitalon. Kuinka monta prosenttia tontin alasta jää käyttämättä, kun tontin pituus on 340 m ja sen leveys on 125 m?

143. Nurmikenttä muodostuu suorakulmiosta ja kahdesta puoliympyrästä. Kentän pituus leveimmällä kohdalla on kuusi kertaa niin pitkä kuin puoliympyrän säde *x*. Kentän reunaa pitkin kulkee juoksurata. Radan pituus on 357 m. Mikä on pisin matka, joka voidaan juosta suoraan eli siten, että juoksija ei joudu lainkaan kaarteeseen?



2.2 Sektori ja segmentti

POHDINTA 1

Ympyrän pinta-ala on 200 cm^2. Ympyrästä erotetaan sektori, jonka keskuskulma on 30°. Sektorin ala on suoraan verrannollinen keskuskulman suuruuteen: Kun sektorin keskuskulma kasvaa, niin sektorin ala kasvaa samassa suhteessa. Muodosta verrantoyhtälö ja ratkaise sektorin ala.

Keskuskulma	Pinta-ala (cm^2)
30°	A
360°	200

POHDINTA 2

Muodosta edellisen tehtävän avulla lauseke, jonka avulla voit laskea sektorin alan, kun keskuskulma on 50°.

POHDINTA 3

Ympyrän säde on r. Ympyrästä erotetaan sektori, jonka keskuskulma on α. Muodosta lauseke sektorin alan laskemiseksi.

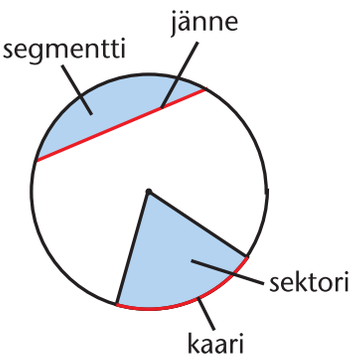
POHDINTA 4

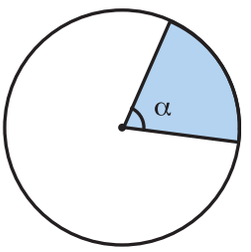
Myös sektorin kaaren pituus on suoraan verrannollinen keskuskulman suuruuteen. Olkoon ympyrän säde r. Sektorin keskuskulma on α ja kaaren pituus b. Täydennä puuttuvat tiedot taulukkoon, muodosta sen avulla verranto ja ratkaise siitä kaaren pituus b.

Keskuskulma	Kaaren pituus
α	b
360°	

Sektori

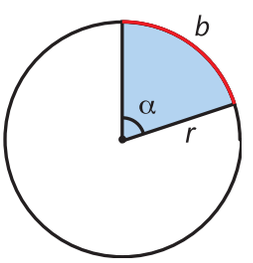
Kaksi sädettä rajaa ympyrästä tasoalueen, jota kutsutaan **sektoriksi**. Sitä ympyrän kehän osaa, jonka säteet rajoittavat, kutsutaan **kaareksi**. **Jänne** syntyy, kun kehän kaksi pistettä yhdistetään janalla. Jänne voi olla enintään halkaisijan pituinen. Jänteen ympyrästä erottama tasoalue on **segmentti**.





Ympyräsektorin kulmaa α sanotaan **keskuskulmaksi**. Kun keskuskulma kasvaa, sitä vastaavan kaaren pituus kasvaa samassa suhteessa. Keskuskulma ja kaaren pituus ovat siis suoraan verrannolliset. Tällöin sektorin kaaren pituus b voidaan määrittää verrannon avulla. Jos valitaan keskuskulmaksi 360°, vastaava kaari on ympyrän koko kehä eli $2\pi r$.

Keskuskulma	Kaari
α	b
360°	$2\pi r$



Tästä saadaan yhtälö

Kerrotaan ristiin.

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{b}{2\pi r}$$

$$360^\circ b = \alpha \cdot 2\pi r \quad \big| : 360^\circ$$

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Kun sektorin keskuskulma α ja ympyrän säde r tunnetaan, saadaan kaaren b pituus laskettua lausekkeesta $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.

Sektorin ala riippuu vastaavalla tavalla keskuskulmasta α. Kun keskuskulma on 360°, sektorina on koko ympyrä ja sen ala on πr^2. Verrantoyhtälön avulla voidaan johtaa kaava sektorin pinta-alalle.

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{A_{\text{sektori}}}{\pi r^2}$$

Kerrotaan ristiin.

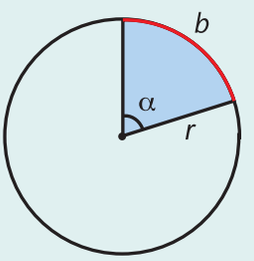
$$A_{\text{sektori}} \cdot 360° = \alpha \cdot \pi r^2 \quad | :360°$$

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

SEKTORI

kaaren pituus $b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$

pinta-ala $A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$



ESIMERKKI 1

Konditoria myy pizzaviipaleita. Asiakas ostaa sektorin muotoisen viipaleen. Sektorin keskuskulma on 65°. Viipale on leikattu ympyrän muotoisesta pizzasta, jonka halkaisija on 40 cm.

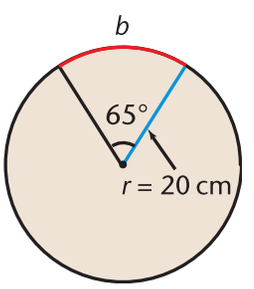
a) Kuinka monta senttimetriä on pizzaviipaleen kaareva reuna?

b) Laske palan pinta-ala.

RATKAISU

a) Pizzan säde on 40 cm : 2 = 20 cm. Koska palan keskuskulma on 65°, reunan pituus on

$$b = \frac{65°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 20 \text{ cm} = 22{,}68\ldots \text{ cm} \approx 23 \text{ cm}$$



b) $A = \frac{65°}{360°} \cdot \pi \cdot (20 \text{ cm})^2 = 226{,}89\ldots \text{ cm}^2 \approx 230 \text{ cm}^2$

VASTAUS

a) 23 cm b) 230 cm^2

ESIMERKKI 2

Ympyrän kaaren pituus on 68 cm ja säteen pituus 28 cm. Laske kaarta vastaavan keskuskulman suuruus.

RATKAISU

Tapa 1

Pituudet ovat samoissa yksiköissä, joten sijoitetaan annetut tiedot kaaren pituuden kaavaan ja ratkaistaan keskuskulman suuruus.

$$68 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 28 \qquad \mid \cdot 360^\circ$$

Kerrotaan nimittäjä pois.

$$68 \cdot 360^\circ = \alpha \cdot 2\pi \cdot 28$$

$$\alpha \cdot 2\pi \cdot 28 = 68 \cdot 360^\circ \qquad \mid : (2\pi \cdot 28)$$

$$\alpha = \frac{68 \cdot 360^\circ}{2\pi \cdot 28}$$

$$\alpha = 139{,}14\ldots^\circ$$

$$\alpha \approx 140^\circ$$

Tapa 2

Käytetään apuna verrannollisuutta. Keskuskulma ja kaaren pituus ovat suoraan verrannollisia.

Keskuskulma	Kaaren pituus
α	68
360°	$2\pi \cdot 28$

Saadaan yhtälö

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{68}{2\pi \cdot 28}$$

Kerrotaan ristiin.

$$68 \cdot 360^\circ = \alpha \cdot 2\pi \cdot 28$$

$$\alpha \cdot 2\pi \cdot 28 = 68 \cdot 360^\circ \qquad \mid : (2\pi \cdot 28)$$

$$\alpha = \frac{68 \cdot 360^\circ}{2\pi \cdot 28}$$

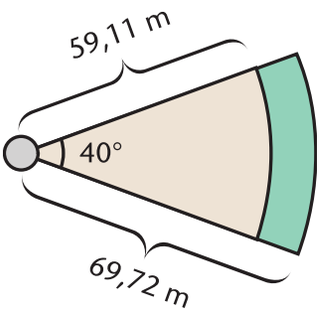
$$\alpha \approx 140^\circ$$

VASTAUS

140°

ESIMERKKI 3 Yleisurheilun MM-kilpailuissa Edmontonissa heitettiin 6.8.2001 kiekonheiton finaali. Finaalissa tulokset vaihtelivat 59,11 metristä 69,72 metriin. Kuinka suuri pinta-ala jää näiden rajaviivojen väliin, jos heittosektorin keskuskulma on 40°?

RATKAISU Lasketaan kahden eri sektorin pinta-alat.



Jos sektorin säde on 69,72 m, niin sen pinta-ala on

$$A_{69,72} = \frac{40°}{360°} \cdot \pi \cdot (69{,}72\ \text{m})^2$$

Jos sektorin säde on 59,11 m, niin sen pinta-ala on

$$A_{59,11} = \frac{40°}{360°} \cdot \pi \cdot (59{,}11\ \text{m})^2$$

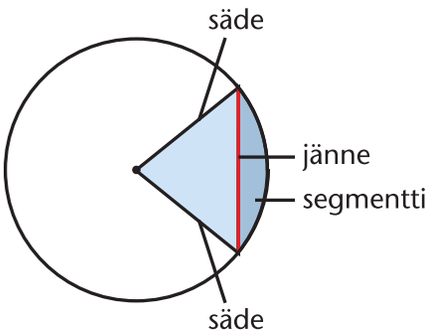
Heittosektorin 69,72 metrin ja 59,11 metrin rajaviivojen väliin jäävän alueen pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{69,72} - A_{59,11} &= \frac{40°}{360°}\pi \cdot (69{,}72\ \text{m})^2 - \frac{40°}{360°}\pi \cdot (59{,}11\ \text{m})^2 \\ &= 477{,}13328...\ \text{m}^2 \approx 480\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

VASTAUS Rajaviivojen väliin jäävä pinta-ala on 480 m^2.

Segmentti

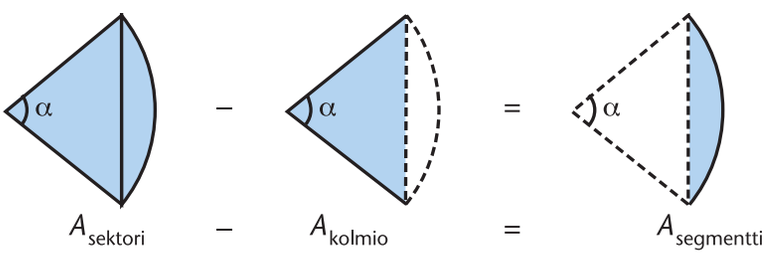
Sektoria rajaavien säteiden päätepisteet voidaan yhdistää janalla, joka on ympyrän jänne. Tällöin syntyy tasakylkinen kolmio, jonka kantana on jänne ja kylkinä ympyrän säteet. Jänteen ja ympyrän kehän väliin jäävää aluetta kutsutaan **segmentiksi**.



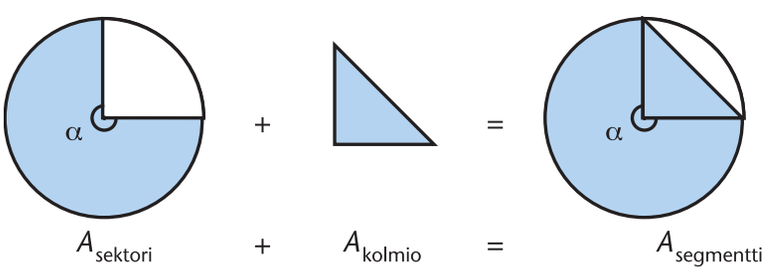
Kaaren asteluku on sama kuin kaarta vastaavan keskuskulman asteluku.

Jänteen pituus ja segmentin pinta-ala riippuvat segmenttiä vastaavan **kaaren asteluvusta**. Segmentin alan laskemiseen tarvitaan jänteen pituus, joka voidaan ratkaista esimerkiksi sopivaa trigonometrista funktiota käyttäen.

Kun kaaren asteluku on alle 180°, segmentin pinta-ala lasketaan vähentämällä sektorin pinta-alasta tasakylkisen kolmion pinta-ala.

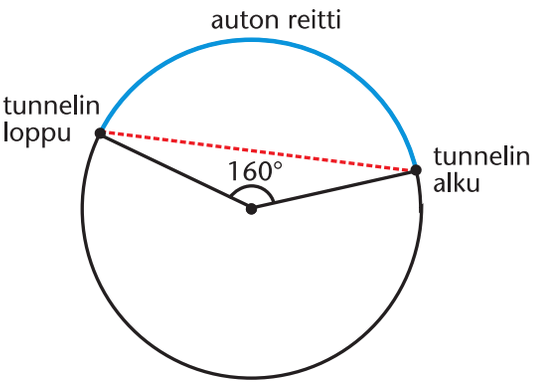


Kun kaaren asteluku on yli 180°, sektorin pinta-alaan tulee lisätä kolmion pinta-ala.



ESIMERKKI 4

Suoran ympyräkartion muotoisen vuoren juurella kulkee autotie. Vuoren ympärysmitta on 120 km. Vuoreen on louhittu suora tunneli junia varten kuvan esittämään kohtaan. Tunnelissa keskinopeus on 50 km/h, kun tiellä keskinopeus on 90 km/h. Jos auto ja juna lähtevät samasta paikasta liikkeelle samanaikaisesti, kumpi saapuu aikaisemmin perille tunnelin toiseen päähän? Auton reitti on ympyrän kaarista lyhyempi.



RATKAISU

Ratkaistaan ensin ympyrän säde.

Vuoren ympärysmitta 120 km eli $p = 120$ km.

$$2\pi r = 120 \quad | : 2\pi$$

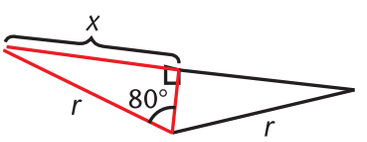
$$r = \frac{120}{2\pi} = 19{,}09\ldots$$

Merkitään jänteen pituutta eli tunnelin pituutta $2x$:llä. Ratkaistaan ensin x sinin avulla

$$\sin 80° = \frac{x}{r}$$

$$\sin 80° = \frac{x}{19{,}09\ldots}$$

$$x = 19{,}09\ldots \cdot \sin 80° = 18{,}80\ldots$$

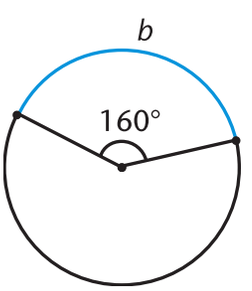


Korkeusjana puolittaa tasakylkisen kolmion huippukulman ja kannan.

Tunnelin pituus on siis $2 \cdot 18{,}80\ldots$ km $= 37{,}61\ldots$ km.

Aika, joka junalta kuluu tunnelissa, on

$$\frac{37{,}61\ldots \text{ km}}{50 \text{ km/h}} = 0{,}75\ldots \text{ h} \approx 45 \text{ min}$$



Lasketaan automatkan eli kaaren b pituus

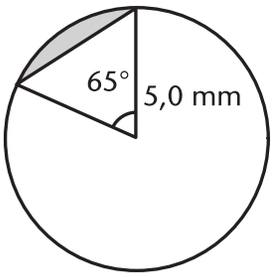
$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r = \frac{160°}{360°} \cdot 120 \text{ km} = 53{,}33\ldots \text{ km}$$

Aika, joka autolta kuluu, on $\frac{53{,}33\ldots \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = 0{,}592\ldots \text{ h} \approx 36 \text{ min}$.

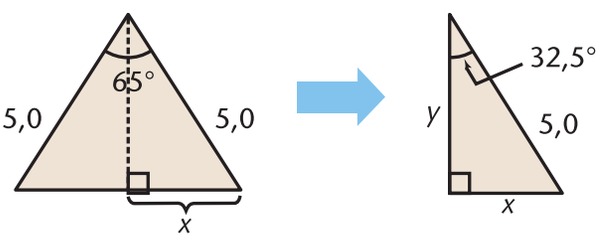
VASTAUS

Autolta kuluu matkaan vähemmän aikaa.

ESIMERKKI 5 Laske väritetyn alueen pinta-ala.



RATKAISU Lasketaan ensin sektorin pinta-ala $A_{\text{sektori}} = \frac{65°}{360°}\pi \cdot 5{,}0^2$.



Tasakylkinen kolmio koostuu kahdesta samanlaisesta suorakulmaisesta kolmiosta. Merkitään suorakulmaisen kolmion kateetteja kirjaimilla x ja y. Kateetit saadaan ratkaistua sinin ja kosinin avulla.

$$\sin 32{,}5° = \frac{x}{5{,}0} \qquad \cos 32{,}5° = \frac{y}{5{,}0}$$
$$x = 5{,}0 \sin 32{,}5° \qquad y = 5{,}0 \sin 32{,}5°$$

Tasakylkisen kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = 2 \cdot \frac{xy}{2} = xy = 5{,}0 \sin 32{,}5° \cdot 5{,}0 \cos 32{,}5°$$

Koska sektorin keskuskulma on alle 180°, niin väritetyn alueen eli segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin pinta-alasta kolmion pinta-ala.

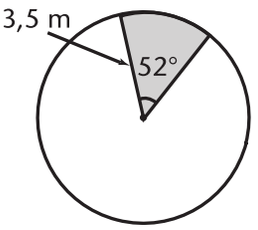
$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= \frac{65°}{360°}\pi \cdot 5{,}0^2 - 5{,}0 \sin 32{,}5° \cdot 5{,}0 \cos 32{,}5° \\ &= 2{,}85\ldots \approx 2{,}9 \end{aligned}$$

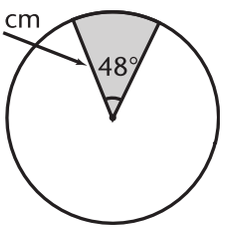
VASTAUS Väritetyn alueen pinta-ala on 2,9 mm^2.

Tehtäviä

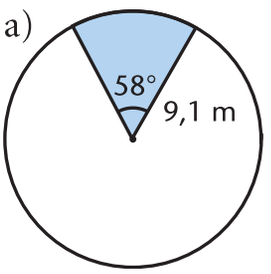
Sektori

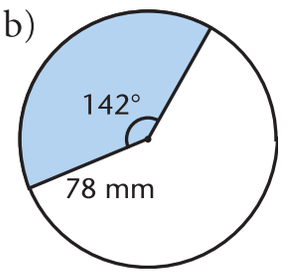
144. Laske väritetyn sektorin kaaren pituus.

a) 

b) 

145. Laske väritetyn sektorin pinta-ala.

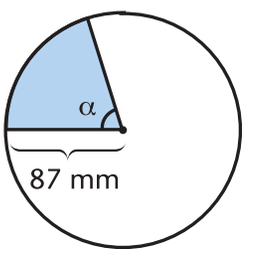
a) 

b) 

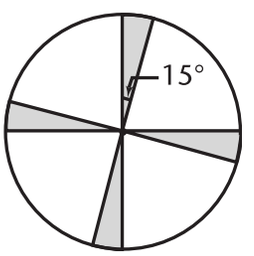
E1 146. Ympyräsektorin keskuskulma on 130°. Ympyrän säde on 26 cm. Laske sektorin

a) kaaren pituus b) pinta-ala.

E2 147. Laske kulma α, kun väritetyn sektorin kaaren pituus on 114 mm.



148. Sirkuksen onnenpyörässä voittaa, jos nuoli pysähtyy johonkin väritetyistä yhtä suurista sektoreista. Onnenpyörän halkaisijan pituus on 1,5 m. Yhden sektorin keskuskulman suuruus on 15°. Kuinka pitkä on se osa ympyrän kehästä, jolle nuolen täytyy pysähtyä, jotta pelaaja voittaisi?



149. Ympyräsektorin kaaren pituus on 125 mm ja kaarta vastaava keskuskulma 60°. Laske ympyrän kehän pituus.

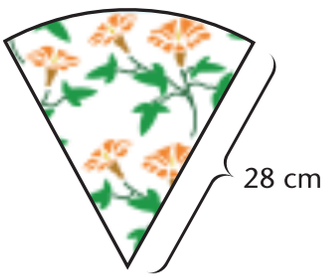
150. Ympyrän kaaren pituus on yhtä suuri kuin ympyrän säde. Laske kaarta vastaavan keskuskulman suuruus.

151. Ympyräsektorin keskuskulma on 14°. Laske koko ympyrän ala, kun sektorin ala on 10,6 m^2.

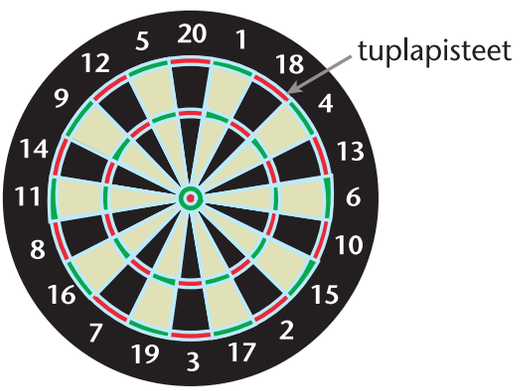
152. Ympyräsektorin pinta-ala on 5,25 cm^2. Kuinka suuri on tämän sektorin keskuskulma, jos koko ympyrän ala on 32 cm^2?

153. Ympyrän säde on 53 cm. Siitä erotetaan sektorin muotoinen alue, jonka kaaren pituus on 65 cm. Laske
a) sektorin keskuskulman suuruus
b) sektorin pinta-ala.

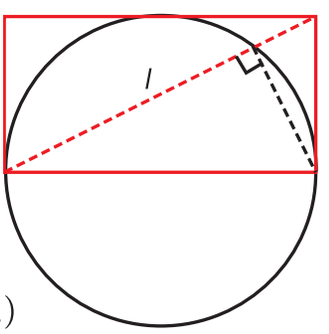
154. Kiinalainen artesaani valmistaa ympyrän muotoisesta kankaanpalasta 10 sektorin muotoista viuhkaa. Viuhkat ovat samankokoisia. Kangasta jää yli 68 cm^2. Mikä on yhden viuhkan pinta-ala? Kuinka suuri on ”viuhkasektorin” keskuskulma?



E3 155. Darts-tikkataulun varsinaisen heittoalueen säde on 22 cm. Uloin kehä antaa osumille kaksinkertaiset pisteet. Sen leveys on vain 1,2 cm. Numeron 20 osuma-alueen muodostaa sektori, jonka keskuskulma on 18°. Kuinka suuri on se alue, joka antaa 40 pistettä?



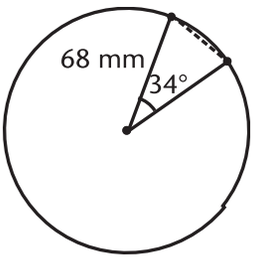
156. Puoliympyrän halkaisija kantana piirretään suorakulmio, jonka korkeus on puoliympyrän säde. Suorakulmio sijaitsee puoliympyrän puolella. Missä suhteessa suorakulmion lävistäjä *l* jakaa puoliympyrän kehän? [S1997, 8c] (Ohje: puoliympyrän sisältämä kehäkulma on 90°.)



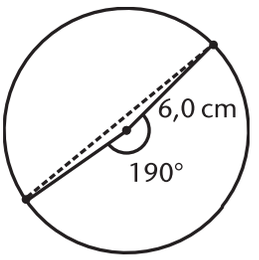
157. Urheilukentälle on viivoilla merkitty ympyräsektorin muotoinen alue, jonka keskuskulma on 30,0° ja sivut 90,0 m. Toimitsija kiertää alueen ympäri kulkien sen ulkopuolella metrin päässä reunasta. Piirrä kuvio toimitsijan reitistä ja määritä reitin pituus. [K1997, 10b]

Segmentti 158. Laske katkoviivalla merkityn jänteen pituus.

a)

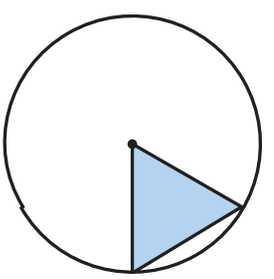


b)



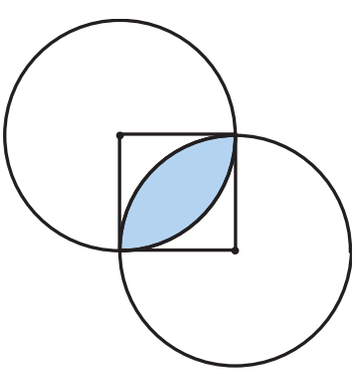
E4 159. Ympyrän muotoisen luistinradan ympärysmitta on 200 m. Veera ja Ville katselevat luistinradan reunalla luistelijoita. Ville kävelee kentän reunaa kulkevaa polkua pitkin Veeran luokse. Kuinka paljon lyhyemmän matkan Ville joutuisi kävelemään, jos hän oikaisisi suoraan kentän poikki, kun polkua pitkin matkaa kertyy 68 m?

E5 160. Tasasivuisen kolmion yksi kärki on ympyrän keskipisteessä ja kaksi muuta kärkeä ovat ympyrän kehällä. Laske muodostuvan pienemmän segmentin ala, kun kolmion sivun pituus on 6,2 cm.



161. Kuinka suuren segmentin rajaavat 100° keskuskulmaa vastaava kaari ja jänne, kun ympyrän säde on 6,8 cm?

162. Neliön kärjet sijaitsevat ympyröiden keskipisteissä. Laske väritetyn kuvion ala, kun neliön sivun pituus on 5,0 cm.

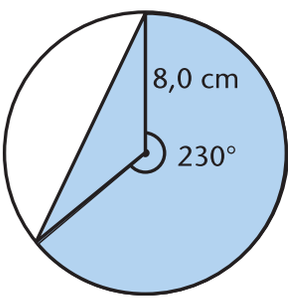


Sekalaisia tehtäviä

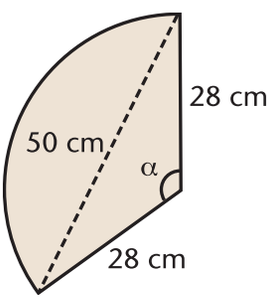
163. a) Ympyrän säde on 5,0 cm ja sektorin keskuskulma 32°. Laske sektorin pinta-ala.
b) Ympyrän säde on 6,0 cm ja sektorin pinta-ala 24,5 cm^2. Laske sektorin keskuskulma.
c) Sektorin keskuskulma on 132° ja sektorin pinta-ala 30,0 cm^2. Laske ympyrän säde.

164. Ympyrän sektorin keskuskulma on 120°. Tämän sektorin kaaren pituus on 7,8 cm. Kuinka pitkä on
a) koko ympyrän kehä
b) ympyrän säde?

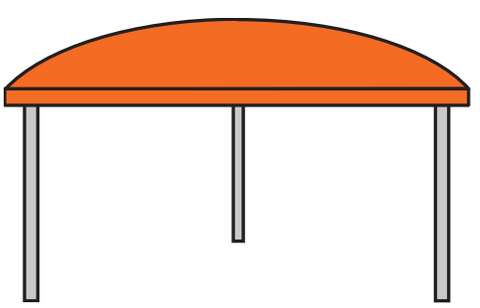
165. Laske väritetyn alueen pinta-ala.



166. Kartongista, jonka leveys on 50 cm, valmistetaan mahdollisimman suuri ympyräsektorin muotoinen vappuhatun malli. Sektorin säde on 28 cm.
a) Laske sektorin keskuskulman suuruus.
b) Kuinka paljon kartonkia hattuun kuluu?

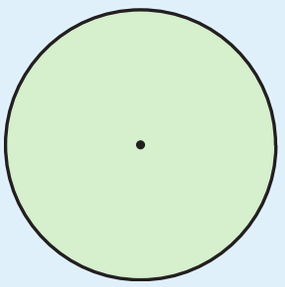


167. Toimiston pöytä on muodoltaan segmentti. Pöytä voidaan yhdistää suuremman vastakappaleen kanssa, jolloin muodostuu yksi ympyrän muotoinen pöytä, jonka säde on 1,8 m. Pienemmän pöydän kaarevan osan pituus on 4,0 m. Laske pienemmän pöydän ala.



2.3 Ympyrän tangentti

Pohdinta 1



1. Piirrä pisteen P kautta sellaiset suorat, jotka vain sivuavat ympyrää. Kuinka monta tällaista suoraa on?

2. Merkitse sivuamispisteet kuvaan ja piirrä näihin pisteisiin ympyrän säteet. Mittaa, kuinka suuri on säteen ja suoran välinen kulma.

3. Merkitse kirjaimella α ympyrää sivuavien suorien välistä kulmaa. Mittaa kulman α suuruus.

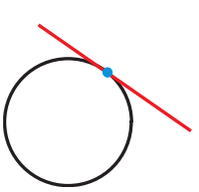
4. Yhdistä janalla ympyrän keskipiste ja piste P. Mitä tapahtuu kulman α suuruudelle?

5. Merkitse muodostuvassa nelikulmiossa ympyrän säteiden väliin jäävää keskuskulmaa kirjaimella β. Päättele, mitä on $\alpha + \beta$.

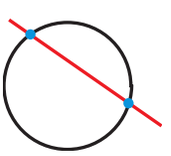
Kulman ratkaiseminen

Suoralla ja ympyrällä voi olla yksi, kaksi tai ei yhtään yhteistä pistettä eli leikkauspistettä.

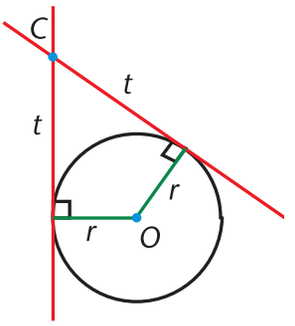
- Jos suoralla ja ympyrällä on yksi yhteinen piste eli suora sivuaa ympyrää, suoraa kutsutaan ympyrän **tangentiksi**.



- Jos suoralla ja ympyrällä on kaksi yhteistä pistettä eli suora kulkee ympyrän läpi, suoraa kutsutaan ympyrän **sekantiksi**.

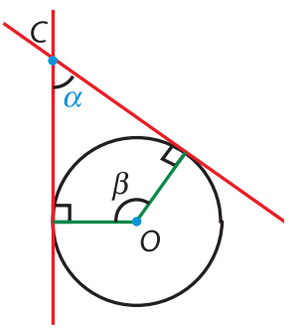


Ympyrän tangentti on suora t, joka sivuaa ympyrän kehää vain yhdessä pisteessä. Merkitään ympyrän keskipistettä kirjaimella O. Valitaan ympyrän ulkopuolelta piste C. Tästä pisteestä voidaan piirtää ympyrälle kaksi tangenttia: yksi ympyrän kummallekin puolelle.

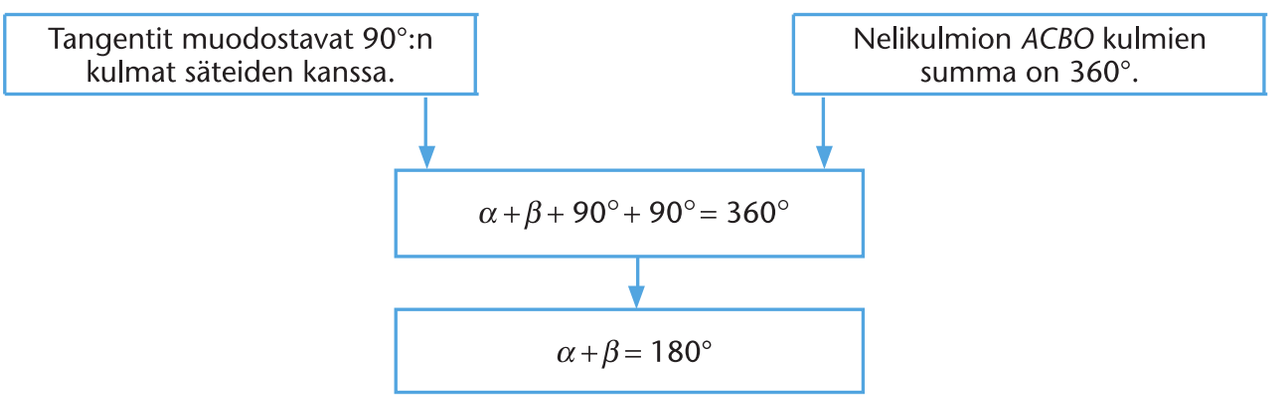


Kun ympyrälle piirretään säde r tangentin sivuamispisteeseen, säde ja tangenttisuora ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

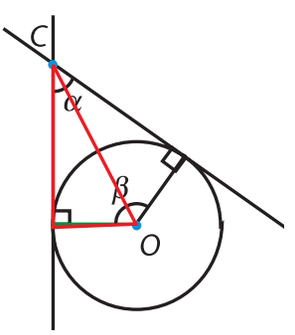
Tangenttien väliin muodostuvaa kulmaa α sanotaan **tangenttikulmaksi**. Muodostuvaan nelikulmioon syntyvä kulma β on säteiden väliin jäävä keskuskulma.



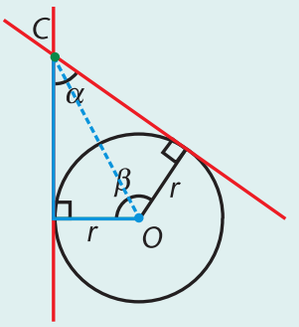
Tangenttikulman α ja sitä vastaavan keskuskulman β summa on aina 180°. Perustellaan tämä seuraavan kaavion avulla.



Kun piste C ja ympyrän keskipiste O yhdistetään janalla, tangenttien väliin muodostuu kaksi keskenään samanlaista, suorakulmaista kolmiota. Tällöin kulmat α ja β puolittuvat. Usein tangenttiin liittyvät ongelmat voidaan ratkaista suorakulmaisen kolmion ominaisuuksien avulla esimerkiksi Pythagoraan lausetta tai trigonometrisia funktioita soveltaen.



Ympyrän tangentin ominaisuuksia



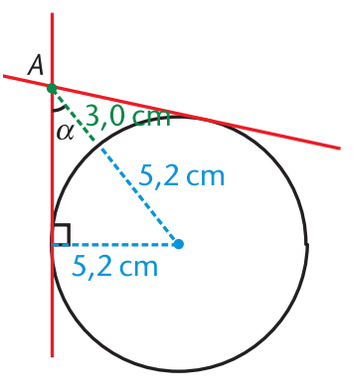
- Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä C voidaan aina piirtää ympyrälle kaksi tangenttia.
- Tangentin ja sivuamispisteeseen piirretyn ympyrän säteen välinen kulma on aina 90°.
- Tangenttikulman α ja siitä vastaavan keskuskulman β summa on aina 180° eli $\alpha + \beta = 180°$.
- Jana OC puolittaa kulmat α ja β.

ESIMERKKI 1

Ympyrän säde on 5,2 cm. Ympyrän ulkopuolella sijaitsevasta pisteestä A piirretään kaksi tangenttia ympyrälle. Pisteen A etäisyys ympyrän kehästä on 3,0 cm. Kuinka suuri on tangenttien väliin muodostuva kulma?

RATKAISU

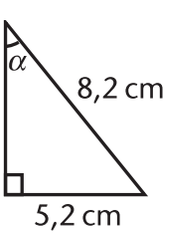
Piirretään mallikuva. Käytetään ratkaisussa kuvioon muodostuvaa suorakulmaista kolmiota.



Kuvan kulma α on puolet kysytystä tangenttikulmasta. Kulman ratkaisemiseksi kolmiosta pitää tuntea kahden sivun pituus.

- Kolmion toisen kateetin pituus on 5,2 cm.
- Kolmion hypotenuusan pituus on 5,2 cm + 3,0 cm = 8,2 cm.

Kulma α voidaan nyt ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.



$$\sin \alpha = \frac{5{,}2}{8{,}2}$$
$$\alpha = 39{,}356...°$$

Kysytty kulma on $2\alpha = 2 \cdot 39{,}356\ldots° = 78{,}71\ldots° \approx 79°$.

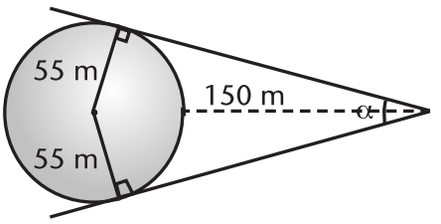
VASTAUS

Tangenttikulma on 79°.

ESIMERKKI 2 Lilli oli menossa katsomaan Tukholman Globen-halliin jääkiekkomaaottelua Ruotsi–Suomi. Lilli pysähtyi 150 metrin päähän katselemaan pallon muotoista Globenia, jonka halkaisija on 110 m. Kuinka suuressa kulmassa Lilli näki Globenin?

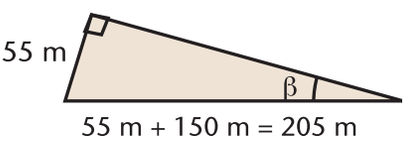
RATKAISU Globenin halkaisija on 110 m, joten sen säde on $r = 55$ m.

Piirretään tilanteesta mallikuva.



Kysytty kulma on tangenttien väliin jäävä kulma eli tangenttikulma α.

Tangenttikulman puolikas β saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.



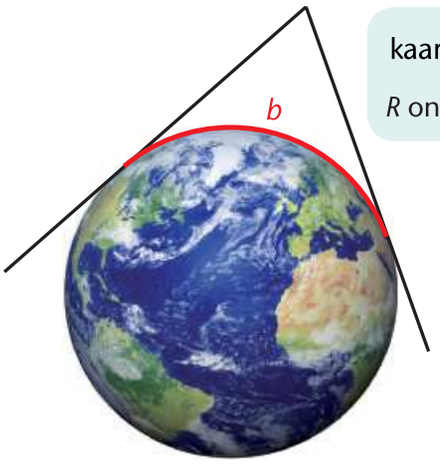
$$\sin\beta = \frac{55}{205}$$
$$\beta = 15{,}56...^\circ$$

Tangenttikulma on $\alpha = 2 \cdot 15{,}56\ldots^\circ = 31{,}12\ldots^\circ \approx 31^\circ$.

VASTAUS Lilli näki Globenin 31°:n kulmassa.

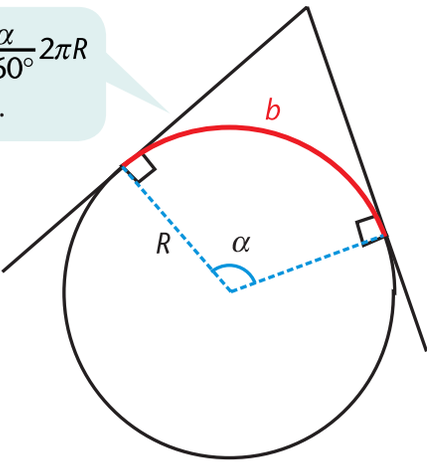
Pituuksia

Maapalloa tarkastellaan useissa tehtävissä pallon poikkileikkauskuvan eli ympyrän avulla. Kun maapallon pinnalla mitataan etäisyyksiä, on huomioitava pinnan kaarevuus. Monesti tämä tarkoittaa sektorin kaaren pituuden laskemista.



kaaren pituus $b = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi R$

R on maapallon säde.

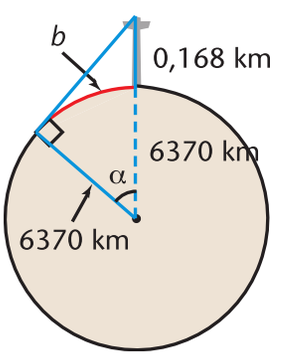


Esimerkki 3

Kuinka kauas Näsinneulan huipulla oleva henkilö voi korkeintaan nähdä maanpintaa pitkin mitattuna, kun Näsinneulan korkeus on 168 metriä? Maapallon säde on 6370 km.

Ratkaisu

Tornin huipulta voi nähdä korkeintaan horisonttiin saakka huipusta maapallon pinnalle piirrettyä tangenttia pitkin.



Maapallon säde on 6370 km. Kun siihen lisätään tornin korkeus kilometreinä, saadaan kuvan kolmion hypotenuusa.

Kysytty matka mitataan maapallon pintaa pitkin. Tehtävänä on siis laskea kaaren b pituus. Tähän tarvitaan kulmaa α.

$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370 + 0{,}168}$$

$$\alpha = 0{,}4161...^\circ$$

Kaaren b pituus on tällöin

$$\frac{0{,}4161...^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km} = 46{,}26... \text{ km}$$

Vastaus

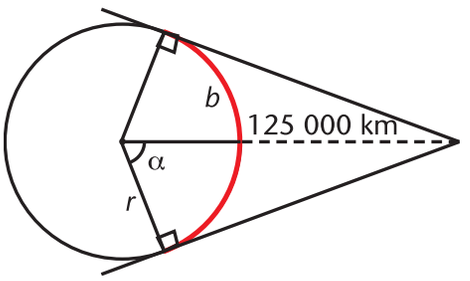
Henkilö voi nähdä 46,3 km:n päähän.

ESIMERKKI 4

Avaruusalus leijailee 125 000 km:n päässä maasta päiväntasaajan kohdalla. Kuinka suuren osan päiväntasaajasta avaruusaluksen miehistö näkee, kun maapallon ympärysmitta on 40 000 km?

RATKAISU

Miehistö näkee aluksesta matkan, jota kuvaa piirroksessa ympyrän kaari b. Tämän ratkaisemiseen tarvitaan ympyrän säde r ja kulma α.



Ympyrän kehän pituus on 40 000 km, joten saadaan yhtälö

$p = 2\pi r$

$$2\pi r = 40000 \quad | : 2\pi$$

$$r = \frac{40000}{2\pi}$$

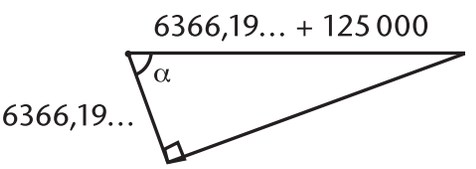
$$= 6366{,}19\ldots$$

Jos tehtävässä on annettu maapallon ympärysmitta, säde on laskettava sen avulla.

Kulma α voidaan ratkaista kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{6366{,}19\ldots}{125000 + 6366{,}19\ldots}$$

$$\alpha = 87{,}22\ldots°$$



Kaarien pituuksien suhteen voi ratkaista myös suoraan keskuskulmien suhteen avulla:

$$\frac{2 \cdot 87{,}22\ldots°}{360°}$$

$$= 0{,}484\ldots$$

$$\approx 48\ \%$$

Kaarta b vastaa keskuskulma 2α, joten

$$b = \frac{2 \cdot 87{,}22\ldots°}{360°} \cdot 40000\ \text{km} = 19382{,}7\ldots\ \text{km}$$

Miehistö näkee päiväntasaajasta

$$\frac{19382{,}7\ldots\ \text{km}}{40000\ \text{km}} = 0{,}484\ldots \approx 48\ \%$$

VASTAUS

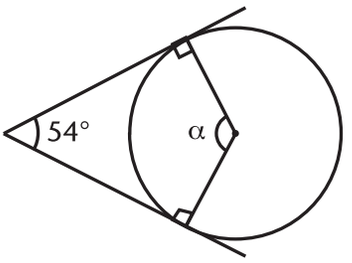
Aluksesta nähdään 48 % päiväntasaajasta.

Tehtäviä

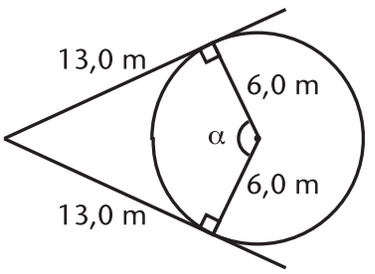
Kulman ratkaiseminen

168. Laske keskuskulman α suuruus.

a)

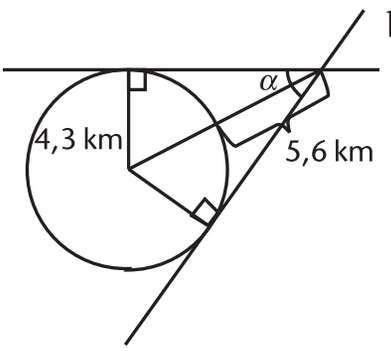


b)

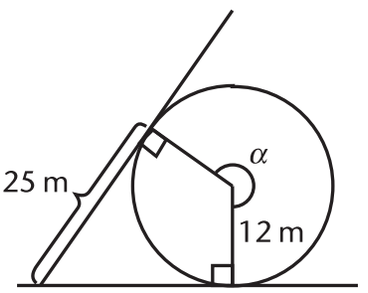


169. Laske kulman α suuruus.

a)



b)



E1 170. Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretään ympyrälle tangentti. Ulkopuolisen pisteen etäisyys ympyrän kehästä on kaksinkertainen säteeseen verrattuna. Laske tangenttien väliin muodostuvan kulman suuruus, kun ympyrän säde on 3,5 cm.

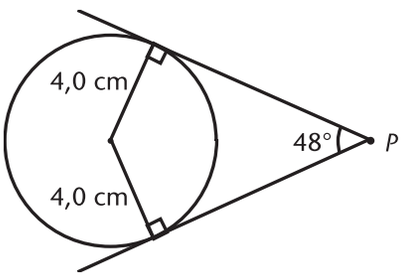
E2 171. Helsingissä Hakaniemessä sijaitsevan ympyrätalon edessä on Hannu Sirenin suunnittelema taideteos Symboli. Symboli on täyspyöreä teräspallo, jonka halkaisija on 3,0 metriä. Kuinka suuressa kulmassa 5,0 metrin päässä taideteosta katsova ohikulkija näkee Symbolin?

172. Ympyrän säde on 5,0 cm. Ympyrälle piirretään kaksi tangenttia pisteestä, jonka kohtisuora etäisyys ympyrän kehästä on 4,0 cm. Laske tangenttien välisen kulman suuruus.

173. Kuinka suuressa kulmassa maapallo näkyy kuun pinnalta kohdasta, joka on lähinnä maata? Maan säde on 6378 km, kuun säde on 1738 km ja maan ja kuun välinen etäisyys (keskipisteestä keskipisteeseen) on 384 400 km. [S1991, 7]

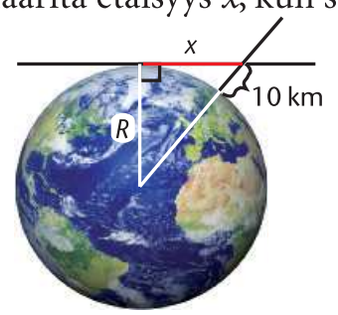
Pituuksia

174. Laske pisteen P etäisyys ympyrän kehästä.

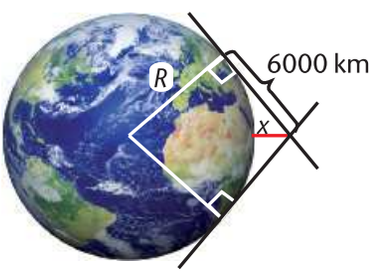


175. Määritä etäisyys x, kun säde on $R = 6370$ km.

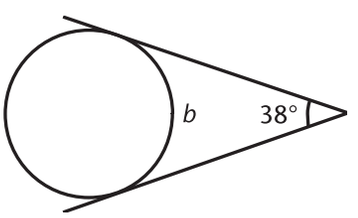
a)



b)



176. Laske tangenttien väliin jäävän kaaren b pituus, kun ympyrän säde on 2,4 m.



E3 177. Kuinka kauas merelle voi nähdä rannalla seisova henkilö, jonka silmät ovat 170 cm:n korkeudella meren pinnasta? Maapallon säde on noin 6380 km. [K1987, 9]

178. Kaisa seisoo lintutornissa, jonka korkeus on 12,4 m. Lintutornista on esteetön näkyvyys joka suuntaan. Kaisan lintutornista 15 km:n päässä on toinen lintutorni. Pystyykö Kaisa näkemään kiikareilla toisella lintutornilla seisovan Juuson? Kaisan ja Juuson pituus voidaan jättää huomioimatta.

179. Santeri ajaa autollaan pimeällä suoraa valtatietä pitkin kohti kotikaupunkiaan. Kuinka pitkä ajomatka hänellä on jäljellä hetkellä, jolloin hän juuri näkee kotikaupunkinsa ensimmäiset valot, jotka ovat 17 m:n korkeudella? Maapallon säde on 6370 km.

E4 180. Satelliitti lentää 48,0 kilometrin korkeudella maanpinnasta. Kuinka pitkän alueen satelliitin näkökenttä kattaa maan pinnalla, kun maapallon ympärysmitta on 40 000 km?

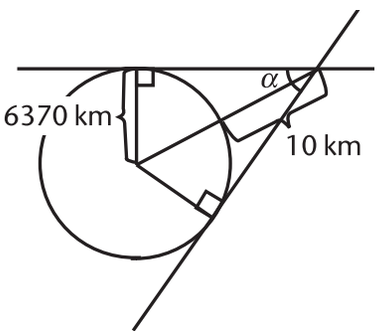
181. Suomen pituus on 1160 km. Kuinka korkealle vähintään pitäisi maanpinnasta nousta, jotta näkisi Suomen kokonaisuudessaan? Maapallon säde on 6370 km.

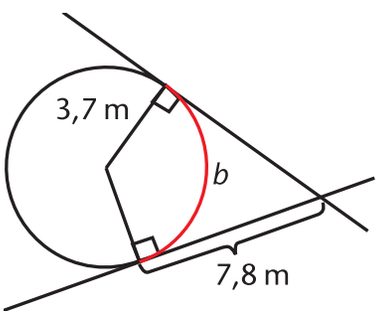
182. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 15 cm. Sen sisään on piirretty suurin mahdollinen ympyrä. Laske tämän ympyrän kehän pituus.

183. Tasasivuisen kolmion sisälle on piirretty suurin mahdollinen ympyrä, jonka säde on 2,2 cm. Kuinka monta prosenttia kolmion pinta-ala on ympyrän pinta-alaa suurempi?

Sekalaisia tehtäviä

184. a) Laske kulman α suuruus. b) Laske kaaren b pituus.





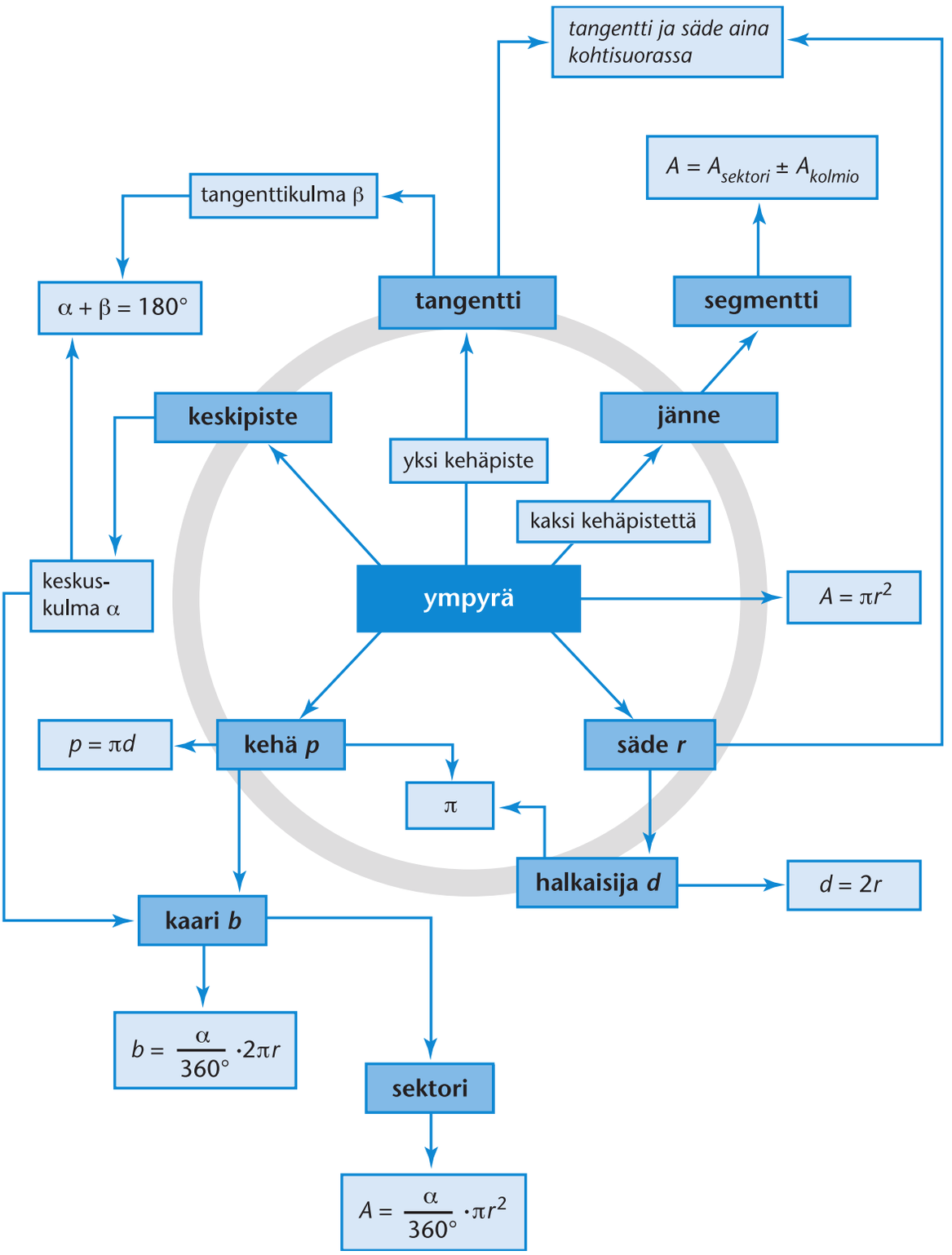
185. Ympyrälieriön muotoisen tornin poikkileikkauksen halkaisija on 34,8 m. Niilo katselee tornia 16,0 metrin päässä. Kuinka suuressa kulmassa Niilo näkee tornin?

186. Purjelaivan tähystyskori on 32 metrin korkeudessa meren pinnasta. Kuinka kauas tähystyskorista voi nähdä? Maapallon säde on 6370 km.

187. Kuinka monta prosenttia päiväntasaajasta näkyy suoraan sen yläpuolella 10 kilometrin korkeudessa lentävästä lentokoneesta, kun päiväntasaajan pituus on 40 000 km?

188. Pyöreän mainospylvään läpimitta on 2,0 m. Pylvääseen on kiinnitetty 2,5 m leveä mainos. Kuinka kaukana pylväästä vähintään on seistävä, jotta mainos näkyy koko leveydeltään?

Keskeisiä käsitteitä

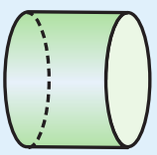


3 Avaruuskappaleita

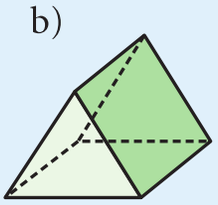
3.1 Lieriö

POHDINTA 1 Luokittele seuraavat kappaleet. Perustele luokittelusi.

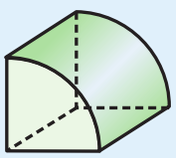
a)



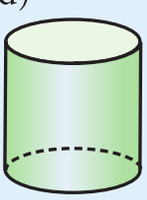
b)



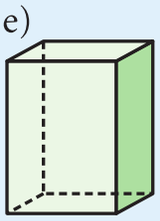
c)



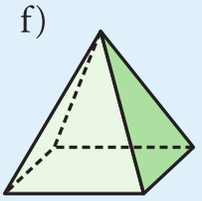
d)



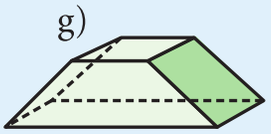
e)



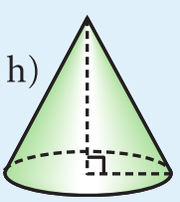
f)



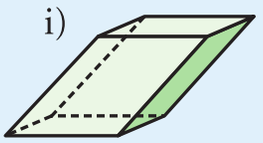
g)



h)

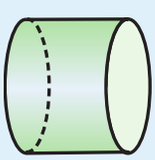


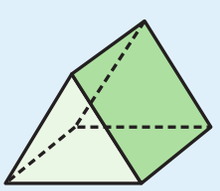
i)



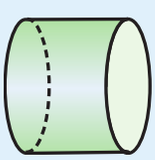
POHDINTA 2 Mitä yhteistä on seuraavilla kappaleilla?

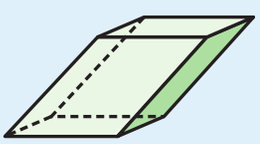
a)





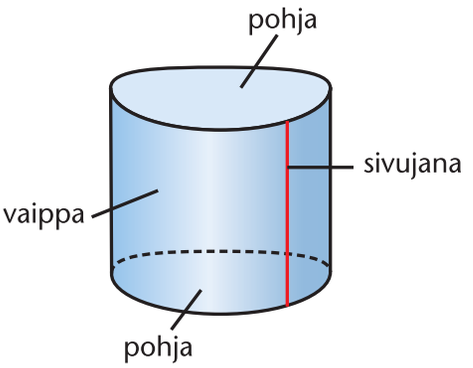
b)





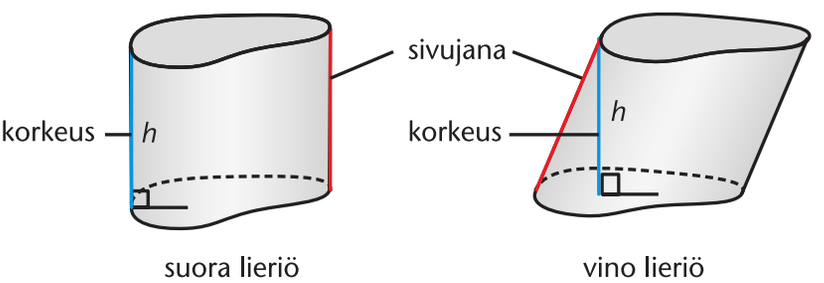
Erilaisia lieriöitä

Lieriö on kappale, jota rajoittaa kaksi samanlaista yhdensuuntaista **pohjaa** ja näitä yhdistävä **vaippa**. Pohja voi olla mikä tahansa tasoalue, jonka rajaa itseään leikkaamaton suljettu viiva. Vaippa muodostuu, kun pohjien reunojen vastinpisteet yhdistetään janoilla. Näitä janoja sanotaan **sivujanoiksi**.



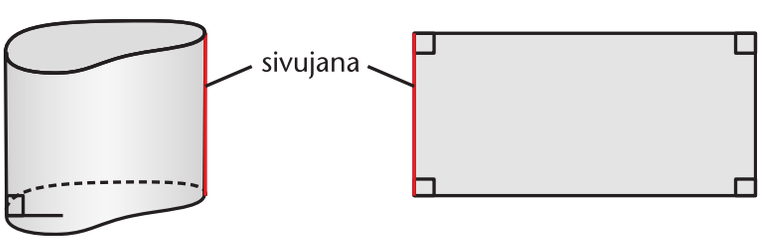
Jos sivujanat ovat kohtisuorassa pohjia vastaan, lieriötä kutsutaan **suoraksi lieriöksi**. Muussa tapauksessa kyseessä on **vino lieriö**. Lieriön **korkeus** on sen pohjien välinen kohtisuora etäisyys.

Lieriön korkeus on siis pohjia vastaan kohtisuoraan piirretyn janan pituus. Suoran lieriön korkeus on yhtä suuri kuin sen sivujanan pituus.

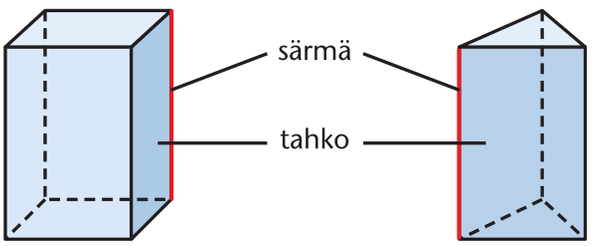


suora lieriö vino lieriö

Lieriön vaippa voidaan leikata auki sivujanaa pitkin ja avata tasoon. Tällöin nähdään lieriön vaipan muoto. Suoran lieriön vaippa on avattuna suorakulmio. Sen korkeus h on lieriön sivujanan pituus.



Lieriötä, jonka pohjat ovat monikulmioita, sanotaan **särmiöksi**. Särmiö on **suorakulmainen**, jos se on suora ja sen pohjat ovat suorakulmioita. **Säännöllisen** särmiön pohjana on säännöllinen monikulmio, esimerkiksi tasasivuinen kolmio tai neliö. Särmiön pohjia ja sivuja kutsutaan sen **tahkoiksi**. Särmät erottavat tahkot toisistaan.

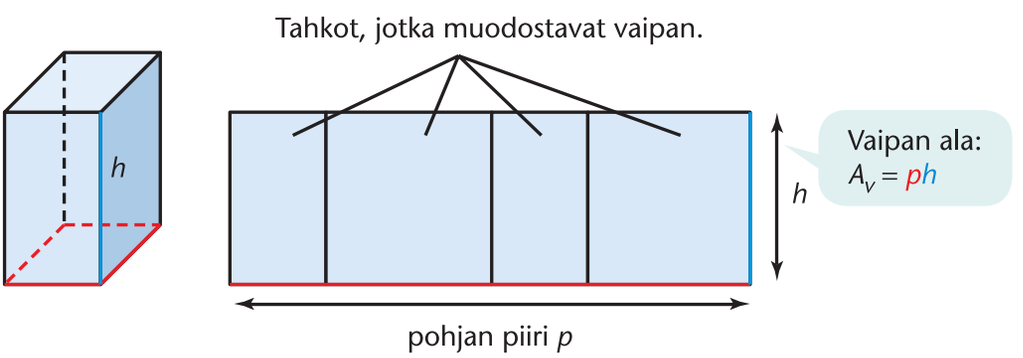


Särmiö, jonka pohja on nelikulmio:
tahkoja 6 kpl
särmiä 12 kpl

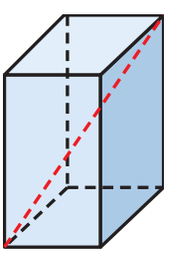
Särmiö, jonka pohja on kolmio:
tahkoja 5 kpl
särmiä 9 kpl

Koska suora särmiö on erikoistapaus suorasta lieriöstä, myös sen avattu vaippa on suorakulmio. Suorakulmion kanta on yhtä pitkä kuin pohjan monikulmion piiri p.

Esimerkiksi särmiöllä, jonka pohjana on nelikulmio, on neljä sivutahkoa, jotka muodostavat vaipan.



Jos särmiön pohjana on monikulmio, jossa on vähintään neljä sivua, särmiöllä on vähintään neljä avaruuslävistäjää. Avaruuslävistäjä on jana, joka kulkee särmiön kahden kärkipisteen välillä, mutta ei kuitenkaan pitkin tahkoa.

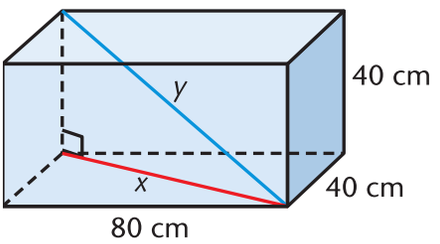


ESIMERKKI 1

Suorakulmaisen särmiön muotoisen akvaarion pituus on 80 cm, leveys 40 cm ja korkeus 40 cm. Kala ui akvaarion ylänurkasta suoraan vastakkaisessa alanurkassa olevan kasvin taakse. Kuinka pitkän matkan kala ui? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

RATKAISU

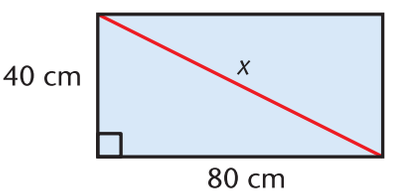
Kala kulkee akvaarion poikki särmiön avaruuslävistäjää pitkin.



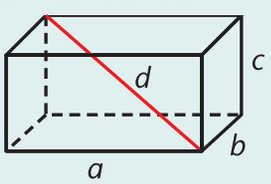
Tilannetta voidaan havainnollistaa suorakulmaisella kolmiolla, jonka kateetteina ovat korkeus ja pohjan lävistäjä x sekä hypotenuusana avaruuslävistäjä y.

Pohjan lävistäjä jakaa suorakulmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi, joten Pythagoraan lauseen mukaan

$$x^2 = 40^2 + 80^2$$
$$x^2 = 8000$$

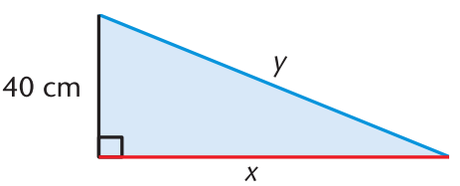


Avaruuslävistäjän pituus voidaan laskea myös kaavalla $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Myös akvaarion avaruuslävistäjän y pituus saadaan Pythagoraan lauseella.

$$y^2 = 40^2 + x^2$$
$$y^2 = 40^2 + 8000$$
$$y^2 = 9600$$
$$y = \pm 97{,}9\ldots$$

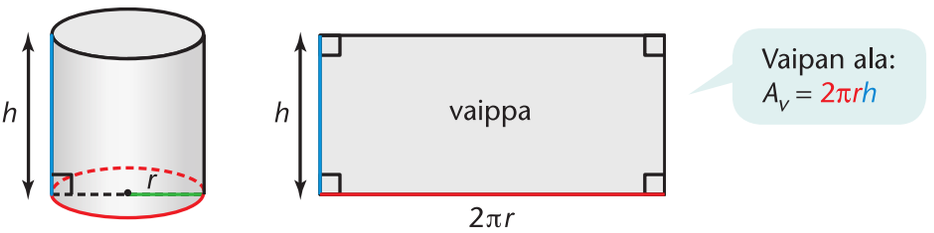


Koska pituus on aina positiivinen, niin $y = 97{,}9\ldots$ cm.

VASTAUS

Kalan uima matka on 98 cm.

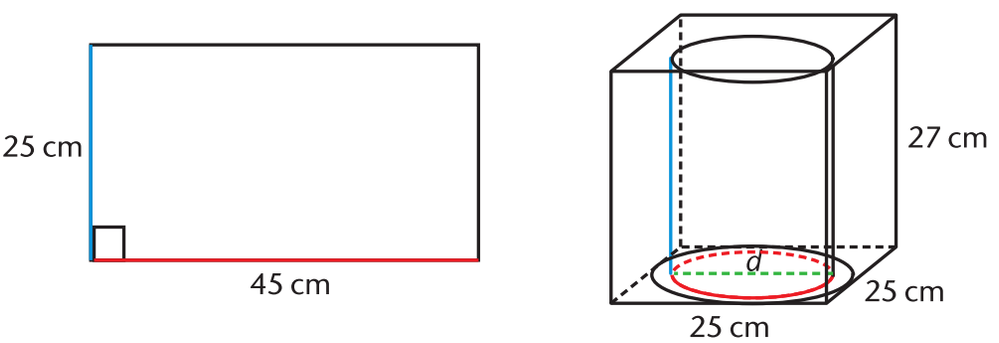
Jos lieriön pohjat ovat ympyröitä, lieriötä sanotaan **ympyrälieriöksi**. Tarkastellaan suoraa ympyrälieriötä, jonka pohjaympyrän säde on r ja korkeus h. Kun tämän ympyrälieriön vaippa leikataan auki sivujanaa pitkin ja avataan tasoon, syntyy suorakulmio. Näin muodostuneen suorakulmion kannan pituus on lieriön pohjaympyrän kehän pituus $2\pi r$.



ESIMERKKI 2

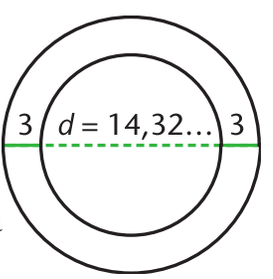
Silinterihattu on muodoltaan lieriö, jossa on 3 cm:n levyinen reunus. Lieriön vaippaan käytetään suorakulmion muotoinen pala kangasta, jonka korkeus on 25 cm (valmiin hatun korkeus) ja kanta 45 cm. Mahtuuko valmis hattu särmiön muotoiseen rasiaan, jonka korkeus on 27 cm ja pohjan mitat 25 cm × 25 cm?

RATKAISU



Merkitään hatun lieriömäisen osan pohjaympyrän halkaisijaa kirjaimella d. Koska ympyrän kehän pituus on 45 cm, saadaan yhtälö, josta d voidaan ratkaista

$$\pi \cdot d = 45 \quad \big| : \pi$$
$$d = \frac{45}{\pi} = 14{,}32\ldots$$



Lieriin tarvitaan lisää molemmille puolille vielä 3 cm, joten hattu vie leveyssuunnassa tilaa

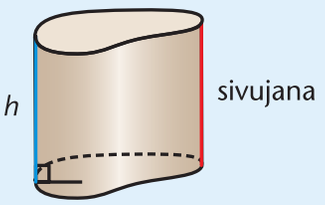
$$3\text{ cm} + 3\text{ cm} + 14{,}32\ldots\text{ cm} \approx 20{,}3\text{ cm} < 25\text{ cm}$$

Myös hatun korkeus 25 cm on pienempi kuin laatikon korkeus 27 cm, joten hattu mahtuu laatikkoon.

VASTAUS

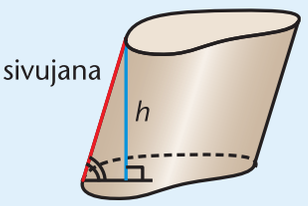
Hattu mahtuu laatikkoon.

Suora lieriö



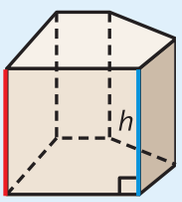
- sivujanat samanpituisia ja kohtisuorassa pohjaa vastaan
- korkeusjana yhtä pitkä kuin sivujana
- avattuna vaippa on suorakulmio

Vino lieriö



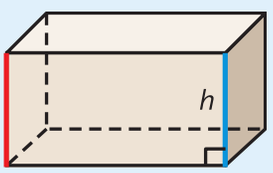
- sivujanat samanpituisia, mutta eivät kohtisuorassa pohjaa vastaan
- korkeusjanan pituus on pohjien välinen kohtisuora etäisyys

Suora särmiö



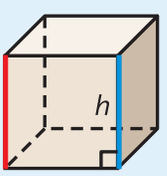
- pohjana monikulmio
- sivujanat samanpituisia ja kohtisuorassa pohjaa vastaan
- korkeusjana yhtä pitkä kuin sivujana
- avattuna vaippa on suorakulmio

Suorakulmainen särmiö



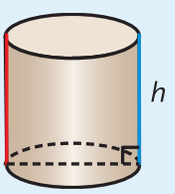
- pohjana suorakulmio
- sivujanat samanpituisia ja kohtisuorassa pohjaa vastaan
- korkeusjana yhtä pitkä kuin sivujana
- avattuna vaippa on suorakulmio

Säännöllinen särmiö
(esimerkiksi kuutio)



- pohjana säännöllinen monikulmio
- sivujanat samanpituisia ja kohtisuorassa pohjaa vastaan
- korkeusjana yhtä pitkä kuin sivujana
- avattuna vaippa on suorakulmio

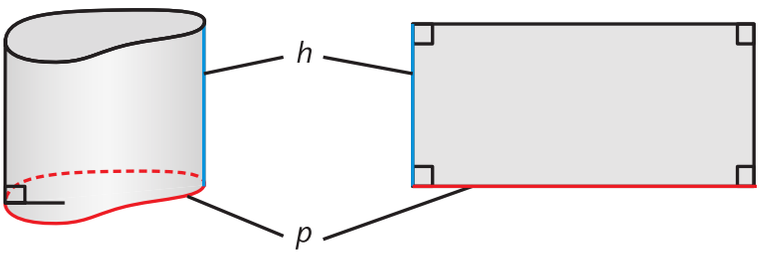
Suora ympyrälieriö



- pohjana ympyrä
- sivujanat samanpituisia ja kohtisuorassa pohjaa vastaan
- korkeusjana yhtä pitkä kuin sivujana
- avattuna vaippa on suorakulmio

Lieriön ala ja tilavuus

Koska suoran lieriön vaippa aukileikattuna aina muodostaa suorakulmion, on vaipan ala suorakulmion ala. Suorakulmion ala lasketaan kannan ja korkeuden tulona.



$$A_{\text{vaippa}} = ph$$

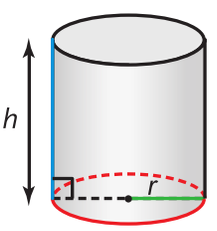
Lieriön kokonaispinta-ala $A_{\text{lieriö}}$ saadaan, kun vaipan alaan lisätään molempien pohjien alat:

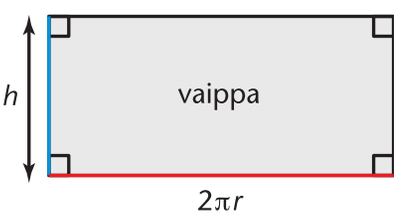
$$A_{\text{lieriö}} = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohjat}}$$

Suoran ympyrälieriön pohjan alan laskemiseksi riittää, kun tunnetaan pohjaympyrän säde r. Vaipan alan laskemiseksi tarvitaan lisäksi lieriön korkeus h.

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{vaippa}} = 2\pi rh$$





Lieriön tilavuus V on pohjan alan A_{pohja} ja korkeuden h tulo. Tämä pitää paikkansa kaikille lieriöille. Korkeusjanan on oltava kohtisuorassa pohjaa vastaan.

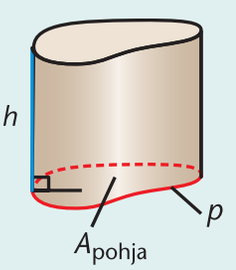
LIERIÖ

pinta-ala

$$A_{\text{vaippa}} = ph$$
$$A_{\text{lieriö}} = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohjat}}$$

tilavuus

$$V_{\text{lieriö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h$$



ESIMERKKI 3

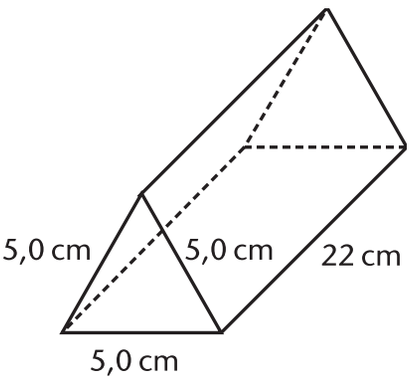
Suklaapakkaus on suoran särmiön muotoinen. Pakkauksen pohjana on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 5,0 cm, ja pakkauksen pituus on 22 cm.

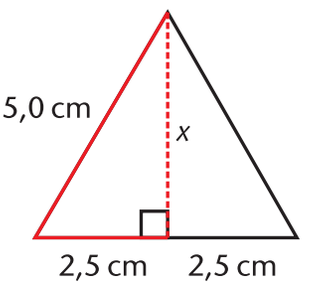
a) Laske pakkaukseen tarvittavan pahvin ala.

b) Laske pakkauksen tilavuus.

RATKAISU

a) Piirretään mallikuva pakkauksesta ja pohjasta.





Lasketaan ensin särmiön pohjakolmion ala. Kolmion korkeusjanan pituus x voidaan ratkaista Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + 2{,}5^2 = 5^2$$
$$x^2 = 18{,}75$$
$$x = \pm\sqrt{18{,}75} = \pm 4{,}330\ldots$$

Pohjakolmion ala on

$$A_{\text{pohja}} = \frac{5{,}0\ \text{cm} \cdot 4{,}330\ldots\ \text{cm}}{2} = 10{,}825\ldots\ \text{cm}^2$$

Vaippa muodostuu kolmesta suorakulmiosta, joiden mitat ovat 22 cm × 5,0 cm.

$$A_{\text{vaippa}} = 3 \cdot 22\ \text{cm} \cdot 5{,}0\ \text{cm} = 330\ \text{cm}^2$$

$A_{\text{lieriö}} = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohjat}}$

Pakkaukseen tarvitaan pahvia

$$330\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 10{,}825\ldots\ \text{cm}^2 \approx 350\ \text{cm}^2$$

b) Särmiön korkeus on 22 cm, joten sen tilavuus on

$V_{\text{lieriö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h$

$$V = 10{,}825\ldots\ \text{cm}^2 \cdot 22\ \text{cm} = 238{,}15\ldots\ \text{cm}^3 \approx 240\ \text{cm}^3$$

VASTAUS

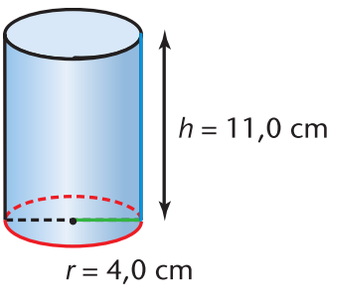
a) 350 cm^2 b) 240 cm^3

ESIMERKKI 4

Suoran ympyrälieriön muotoinen säilyketölkki on 11,0 cm korkea, ja sen pohjaympyrän säde on 4,0 cm. Tölkkiä kiertää etiketti, jonka pinta-ala on 2,3 dm^2. Kuinka monta prosenttia etiketti peittää tölkin vaipasta? Mikä on tölkin tilavuus?

RATKAISU

Merkitään tölkin korkeutta kirjaimella h ja pohjaympyrän sädettä kirjaimella r.



Lasketaan ensin koko säilyketölkin vaipan ala.

$A_{\text{vaippa}} = ph = 2\pi rh$

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= 2\pi r \cdot h \\ &= 2\pi \cdot 4{,}0\ \text{cm} \cdot 11{,}0\ \text{cm} \\ &= 276{,}46\ldots\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vaipan ala on ilmoitettu neliösenttimetreissä. Ilmoitetaan myös etiketin pinta-ala samassa yksikössä: 2,3 $\text{dm}^2 = 230\ \text{cm}^2$.

Etiketin osuus koko vaipan alasta on

$$\begin{aligned} \frac{A_{\text{etiketti}}}{A_{\text{vaippa}}} &= \frac{230\ \text{cm}^2}{276{,}46\ldots\ \text{cm}^2} \\ &= 0{,}8319\ldots \\ &\approx 83\ \% \end{aligned}$$

Lasketaan vielä lieriön tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_p \cdot h \\ &= \pi r^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot (4{,}0\ \text{cm})^2 \cdot 11{,}0\ \text{cm} \\ &= 552{,}9\ldots\ \text{cm}^3 \\ &= 0{,}5529\ldots\ \text{dm}^3 \\ &\approx 0{,}55\ \text{l} \end{aligned}$$

Yksikkömuunnokset s. 147

VASTAUS

Etiketin osuus on 83 % koko vaipan alasta. Tölkin tilavuus on 0,55 litraa.

Tehtäviä

Erilaisia lieriöitä

189. Kuution särmän pituus on 4,0 cm. Laske kuution avaruuslävistäjän pituus.

E1 190. Suoran särmiön pohjana on suorakulmio, jonka pituus on 1,4 dm ja leveys 2,4 dm. Särmiön korkeus on 1,8 dm. Laske särmiön avaruuslävistäjän pituus.

191. Suoran särmiön pohja on neliö, jonka sivun pituus on 25 cm. Särmiön korkeus on 45 cm.
a) Laske särmiön avaruuslävistäjän pituus.
b) Kuinka suuren kulman avaruuslävistäjä muodostaa pohjaneliön lävistäjän kanssa?

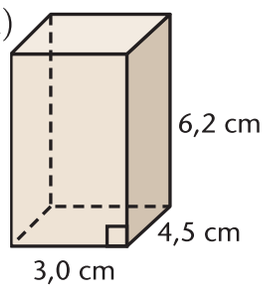
E2 192. Kuution särmän pituus on 15 cm. Lieriön korkeus on 15 cm. Lieriön pohjaympyrän kehän pituus on 63 cm. Mahtuuko lieriö kuution sisälle?

193. Rautatanko on suoran särmiön muotoinen. Sen pohjana on neliö, jonka sivun pituus on 2,8 cm. Tanko halutaan pujottaa putken sisään. Kuinka suuri on putken halkaisijan oltava, jotta tanko mahtuu sisälle?

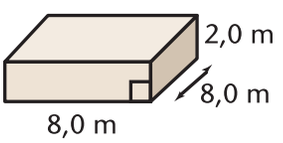
Lieriön ala ja tilavuus

194. Laske kappaleen tilavuus.

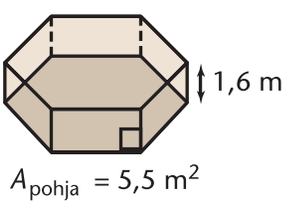
a)



b)

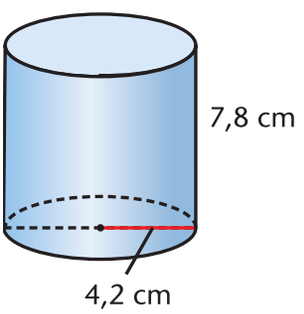


c)

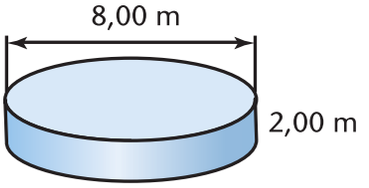


195. Laske kappaleen tilavuus.

a)

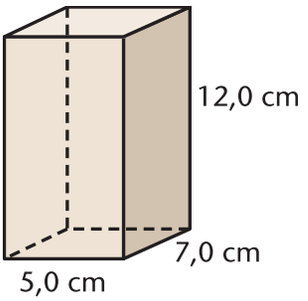


b)

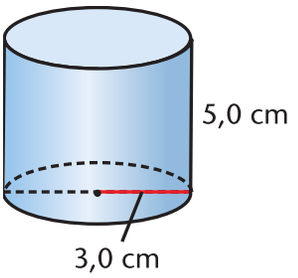


196. Laske kappaleen kokonaispinta-ala.

a)



b)



E3 197. Juustopaketti on muodoltaan suora särmiö, jonka pohjana on tasakylkinen kolmio. Kolmion sivut ovat 4,5 cm, 6,0 cm ja 6,0 cm. Paketin pituus on 11 cm.

a) Laske paketin kokonaispinta-ala.

b) Laske paketin tilavuus.

198. Omenamehua myydään suorakulmaisen särmiön muotoisessa pakkauksessa, jonka korkeus on 18,6 cm ja pohjan mitat 6,0 cm ja 10,2 cm. Kuinka paljon mehupakkauksen valmistamiseen tarvitaan pahvia? Pakkauksen saumoihin kuluvaa pahvimäärää ei oteta huomioon.

199. Boolimaljassa on 3,0 litraa nestettä. Kuinka monta jääpalaa booliin voidaan lisätä, kun maljan tilavuus on 4,0 litraa? Jääpala on kuution muotoinen, ja sen sivun pituus on 2,0 cm.

E4 200. Kaupungintaloa koristaa pylväikkö. Yhden pylvään halkaisija on 95 cm ja korkeus 4,0 m. Pylväät ovat likimain ympyrälieriön muotoisia.

a) Yhteen pylvääseen liimataan suorakulmion muotoinen juliste, jonka leveys on 1,0 m ja korkeus 75 cm. Kuinka monta prosenttia pylvään pinnasta juliste peittää?

b) Kuinka monta kuutiometriä graniittia kaikkien kuuden pylvään valmistamiseen on tarvittu?

201. Suoran ympyrälieriön muotoisen täytekakun pohjaympyrän halkaisija on 25 cm ja korkeus 9 cm.

a) Laske kakun tilavuus.

b) Vieraat söivät kakusta puolet. Jäljelle jääneestä kakusta Otto söi puolet, minkä jälkeen Liisa söi kolmasosan jäljelle jääneestä palasta. Kuinka paljon kakusta oli tämän jälkeen jäljellä?

202. Kaupassa myydään lakkahilloa kahdessa erilaisessa, suoran ympyrälieriön muotoisessa purkissa. Toisen purkin pohjan halkaisija on 7,5 cm ja korkeus 13 cm. Toisen purkin pohjan halkaisija on 2,5 cm suurempi, mutta korkeus on puolet pienempi.
a) Laske kummankin hillopurkin tilavuus.
b) Kuinka monta prosenttia enemmän hilloa on tilavuudeltaan isommassa purkissa?

203. Suoran lieriön pohjana on säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 4,5 cm. Laske lieriön kokonaispinta-ala, kun lieriön korkeus on 12 cm. Mikä on tämän kappaleen tilavuus?

204. Arpakuution kokonaispinta-ala on 4,86 cm^2. Kuinka suuri on kuution tilavuus?

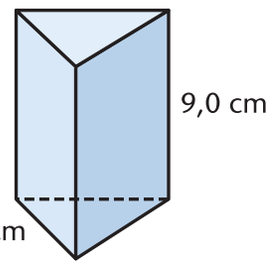
205. Suorakulmion muotoisesta peltilevystä (mitat 40 cm × 30 cm) voidaan valmistaa ympyrälieriön muotoinen vaippa kahdella tavalla: lieriön korkeus on joko 40 cm tai 30 cm. Kumman lieriön tilavuus on suurempi, ja mikä on tilavuuksien suhde? [S1999, 4b]

206. Kuution sisällä on suurin mahdollinen suora ympyrälieriö. Kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kuution tilavuudesta?

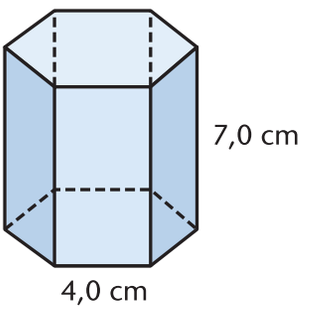
Sekalaisia tehtäviä

207. Laske suoran särmiön tilavuus, kun pohja on säännöllinen monikulmio.

a)



b)



208. Kuution tilavuus on 512 cm^3. Laske
a) kuution kokonaispinta-ala
b) avaruuslävistäjän pituus.

209. Konditoria Kolmio pakkaa useimmat leivonnaisensa suoran särmiön muotoiseen rasiaan, jonka pohja on tasasivuinen kolmio. Rasian pohjasivun leveys on 14 cm ja rasian korkeus 10 cm. Suklaakakku on muodoltaan suora ympyrälieriö. Kuinka suuri saa kakun ympärysmitta enintään olla, jotta se mahtuisi mainittuun rasiaan?

210. Suorakulmaisen särmiön muotoinen hautakivi on 80 cm korkea, 2,10 m pitkä ja 32 cm leveä. Voidaanko kivi nostaa nosturilla, joka pystyy nostamaan enintään kahden tonnin painoisen kuorman? Hautakiven tiheys on $2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3. [K2000, 3]

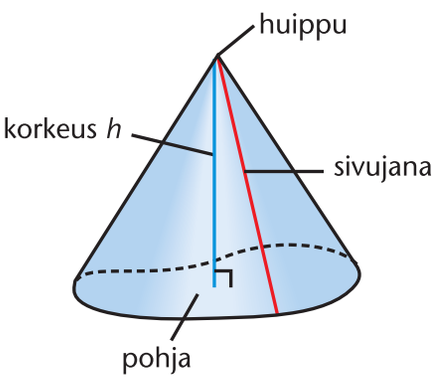
211. Oltermanni on suoran ympyrälieriön muotoinen juusto, jonka pohjan halkaisija on 11,0 cm ja korkeus 10,5 cm.
a) Laske juuston tilavuus.
b) Kuinka paljon tarvitaan muovia juuston pakkaamiseen?

212. Öljytynnyrin pohjan halkaisijan ja korkeuden suhde on 4:7 ja tilavuus 140 l.
a) Laske tynnyrin halkaisija.
b) Paljonko peltiä tarvitaan yhden tynnyrin valmistamiseen?

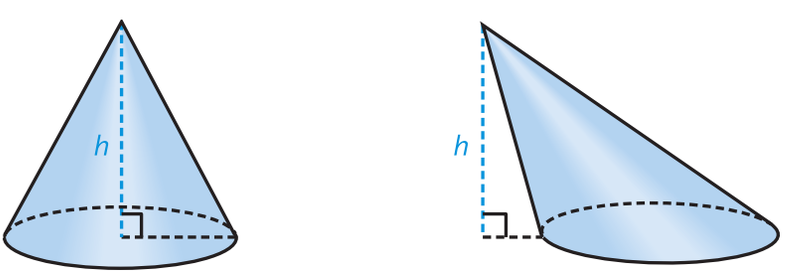
3.2 Kartio

Kartio on kappale, jota rajoittavat pohja ja vaippa. Pohja voi olla mikä tahansa tasoalue, jonka rajaa itseään leikkaamaton suljettu viiva. Kartion **vaippa** syntyy, kun pohjan reunapisteet yhdistetään janoilla pohjan ulkopuolella olevaan pisteeseen.

- Sitä pohjan ulkopuolista pistettä, johon pohjan reunapisteet yhdistetään, sanotaan kartion **huipuksi**.
- Huipusta pohjan reunalle piirrettyjä janoja sanotaan **sivujanoiksi**.
- Kartion **korkeus** h on huipusta pohjaa vastaan kohtisuoraan piirretyn janan pituus.

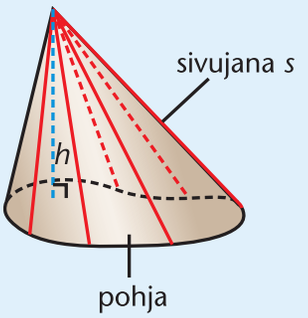
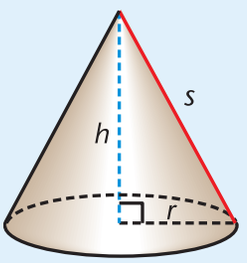
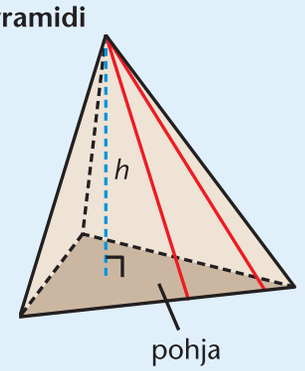


Kartio on **suora**, jos korkeusjanan toinen päätepiste on pohjan keskipiste. Muussa tapauksessa kartio on **vino**.



suora kartio vino kartio

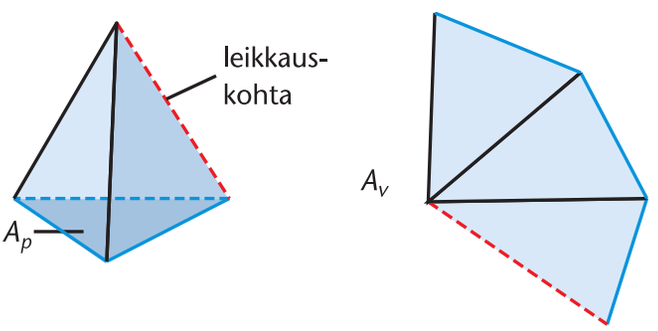
Kartioita voidaan luokitella pohjan muodon mukaan samoin kuin lieriöitäkin. Jos kartion pohja on ympyrä, sitä kutsutaan **ympyräkartioksi**. Jos kartion pohja on monikulmio, kartiota kutsutaan **pyramidiksi**.

Kartio  	• sivujanat voivat olla eri pituisia • korkeusjanan toinen päätepiste ei välttämättä ole pohjan keskipisteessä
Suora ympyräkartio  	• pohjana ympyrä • kaikki sivujanat ovat samanpituisia • korkeusjanan toinen päätepiste on pohjaympyrän keskipiste
Suora pyramidi  	• pohjana monikulmio • pyramidi on lisäksi **säännöllinen**, jos pohjana on jokin säännöllinen monikulmio (esimerkiksi neliö) • sivujanat ovat eri pituisia • korkeusjanan toinen päätepiste ei välttämättä ole pohjan keskipiste

Kartion pohjan ja vaipan ala

Kartion vaippa voidaan ”leikata auki” ja levittää tasoon. Muodostuva kuvio riippuu kartion tyypistä.

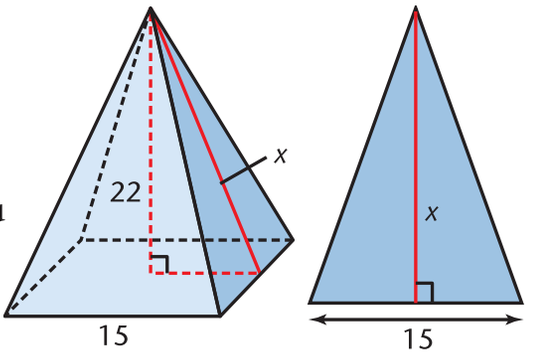
Pyramidin vaippa muodostuu kolmioista. Vaipan ala saadaan kolmioiden pinta-alojen summana.



Pyramidin kokonaispinta-ala on pohjan ja vaipan alan summa.

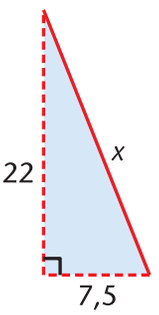
ESIMERKKI 1 Säännöllisen pyramidin pohjana on neliö, jonka sivun pituus on 15 cm. Laske pyramidin kokonaispinta-ala, kun sen korkeus on 22 cm.

RATKAISU Piirretään pyramidista mallikuva.



Pyramidin vaippa muodostuu neljästä tasakylkisestä kolmiosta.

Yksittäisen kolmion korkeus x voidaan laskea Pythagoraan lauseella.



$$22^2 + 7{,}5^2 = x^2$$
$$x^2 = 540{,}25$$
$$x = \pm\sqrt{540{,}25} = \pm 23{,}243\ldots$$

Koska korkeus on positiivinen, ratkaisuksi kelpaa vain $x = 23{,}243\ldots$

Yhden kolmion ala on

$$\frac{15 \cdot x}{2} = 7{,}5x = 7{,}5 \cdot 23{,}243\ldots = 174{,}32\ldots\ (\text{cm}^2)$$

Koska vaippa koostuu neljästä kolmiosta, niin sen ala on

$$A_{\text{vaippa}} = 4 \cdot 174{,}32\ldots \text{ cm} = 697{,}298\ldots \text{ cm}$$

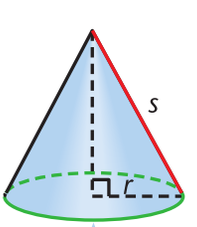
Pohjan ala $A_{\text{pohja}} = (15 \text{ cm})^2 = 225 \text{ cm}^2$.

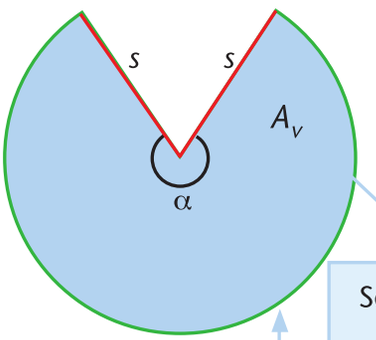
Pyramidin kokonaispinta-ala on

$$A = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohja}}$$
$$= 697{,}298\ldots \text{ cm}^2 + 225 \text{ cm}^2 = 922{,}298 \text{ cm}^2$$

VASTAUS Pyramidin kokonaispinta-ala on 920 cm^2.

Kun suoran ympyräkartion, jonka sivujanan pituus on s, vaippa leikataan auki ja levitetään tasoon, muodostuu ympyräsektori. Merkitään tämän s-säteisen sektorin keskuskulmaa kirjaimella α.





Kartion pohjaympyrän kehän pituus
$2\pi r$

Muodostuneen sektorin kaaren pituus
$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi s$

Sektorin ala A_V
$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi s^2$

Kartion pohjaympyrän kehä ja sektorin kaari ovat yhtä pitkät.

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi s = 2\pi r \quad | : 2\pi$$
$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot s = r$$
$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{s}$$

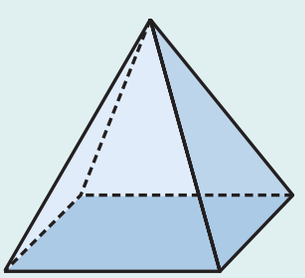
Kartion vaipan ala
$$A_V = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi s^2$$
$$= \frac{r}{s} \cdot \pi s^2$$
$$= \pi rs$$

Kokonaispinta-ala
$A = A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohja}}$

KARTION VAIPAN PINTA-ALA

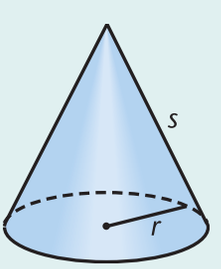
Pyramidi

A_{vaippa} = sivutahkoina olevien kolmioiden pinta-alojen summa

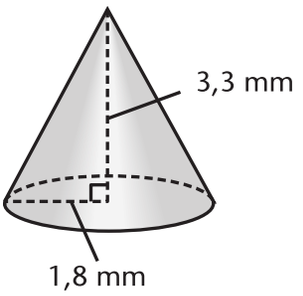


Ympyräkartio

$A_{\text{vaippa}} = \pi rs$

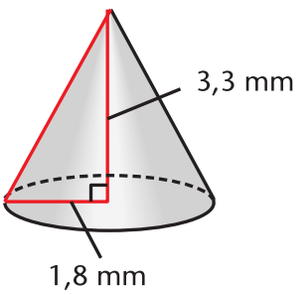


ESIMERKKI 2 Laske suoran ympyräkartion kokonaispinta-ala.



RATKAISU Vaipan alan laskemiseksi määritetään ensin sivujanan s pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$s^2 = 1{,}8^2 + 3{,}3^2$$
$$s^2 = 14{,}13$$
$$s = \pm\sqrt{14{,}13} = \pm 3{,}758\ldots$$



Koska sivujanan pituus on aina positiivinen, niin $s = 3{,}758\ldots$ mm.

Vaipan ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= \pi rs \\ &= \pi \cdot 1{,}8 \text{ mm} \cdot \sqrt{14{,}13} \text{ mm} \\ &= 21{,}256\ldots \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Kartion pohjan ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{pohja}} &= \pi \cdot (1{,}8 \text{ mm})^2 \\ &= 10{,}178\ldots \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

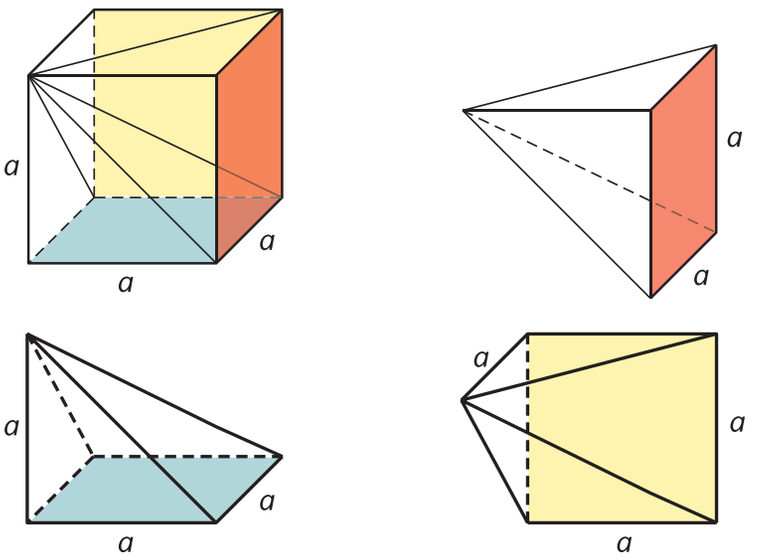
Kokonaispinta-alaksi A saadaan

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{vaippa}} + A_{\text{pohja}} \\ &= \pi \cdot 1{,}8 \cdot \sqrt{14{,}13} \text{ mm}^2 + \pi \cdot 1{,}8^2 \text{ mm}^2 \\ &= 31{,}4\ldots \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

VASTAUS Kartion kokonaispinta-ala on 31 mm^2.

Kartion tilavuus

Kuutio voidaan jakaa kolmeksi keskenään samanlaiseksi neliöpohjaiseksi kartioksi.



Yhden kartion tilavuus on tällöin kolmasosa koko kuution tilavuudesta. Koska kuution tilavuus on

$$V_{\text{kuutio}} = a^3$$

niin yhden kartion tilavuudeksi saadaan

$$V_{\text{kartio}} = \frac{a^3}{3}$$

Sama pätee mihin tahansa kartioon: kartion tilavuus on kolmasosa vastaavan lieriön tilavuudesta. Koska lieriön tilavuus on

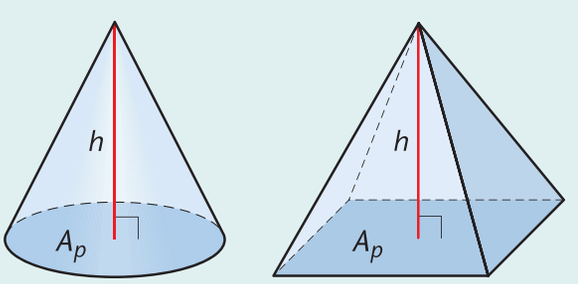
$$V_{\text{lieriö}} = A_p \cdot h$$

niin kartion tilavuudeksi saadaan

$$V_{\text{kartio}} = \frac{A_p \cdot h}{3}$$

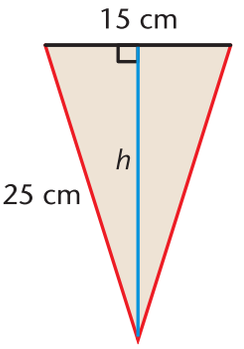
Kartion tilavuus

$$V_{\text{kartio}} = \frac{A_p \cdot h}{3} = \frac{1}{3} A_p \cdot h$$



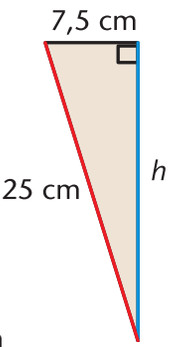
ESIMERKKI 3 Suoran ympyräkartion muotoisen popcorn-astian suuaukon halkaisija on 15 cm ja sivujanan pituus 25 cm. Laske popcorn-astian tilavuus litroina.

RATKAISU Piirretään astian poikkileikkauskuva.



Poikkileikkauskuva on tasakylkinen kolmio, joka voidaan jakaa kahdeksi keskenään samanlaiseksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Ratkaistaan suorakulmaisen kolmion korkeus Pythagoraan lauseen avulla.



$$h^2 + 7{,}5^2 = 25^2$$
$$h^2 = 25^2 - 7{,}5^2$$
$$h = \pm\sqrt{25^2 - 7{,}5^2}$$

Koska kolmion korkeus on aina positiivinen, niin

$$h = \sqrt{25^2 - 7{,}5^2} = 23{,}848\ldots \text{ (cm)}$$

Popcorn-astian suuaukon pinta-ala

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (7{,}5 \text{ cm})^2 = 176{,}71\ldots \text{ cm}^2$$

Popcorn-astian tilavuus

$$V = \frac{Ah}{3} = \frac{176{,}71\ldots \text{ cm}^2 \cdot 23{,}84\ldots \text{ cm}}{3} = 1404{,}7914\ldots \text{ cm}^3$$

Muunnetaan tilavuus litroiksi.

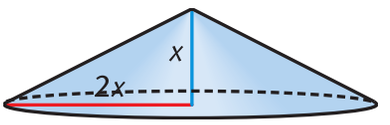
Yksikkö-muunnokset s. 147

$$1404{,}79\ldots \text{ cm}^3 = 1{,}404\,79\ldots \text{ dm}^3 = 1{,}404\,79\ldots \text{ litraa}$$

VASTAUS Popcorn-astian tilavuus on 1,4 litraa.

ESIMERKKI 4 Suoran ympyräkartion korkeus on puolet pohjaympyrän säteen pituudesta. Laske kartion korkeus ja pohjaympyrän säde, kun kartion tilavuus on 250 cm^3.

RATKAISU Merkitään kartion korkeutta kirjaimella x.



Koska korkeus on puolet pohjaympyrän säteestä, on pohjan säde tällöin $2x$.

Kartion tilavuus

$$V = \frac{\pi(2x)^2 \cdot x}{3} = \frac{\pi 4x^2 \cdot x}{3} = \frac{4\pi x^3}{3}$$

Koska kartion tilavuus on 250 cm^3, saadaan yhtälö

$$\frac{4\pi x^3}{3} = 250 \quad \big| \cdot 3$$

Kerrotaan nimittäjä pois.

$$4\pi x^3 = 750 \quad \big| : 4\pi$$

$$x^3 = \frac{750}{4\pi}$$

$$x^3 = 59{,}683\ldots$$

$$x = \sqrt[3]{59{,}683\ldots}$$

Kantaluku x ratkaistaan kuutiojuuren $\sqrt[3]{\ }$ avulla.

$$x = 3{,}907\ldots \text{ (cm)}$$

Kartion korkeus on $x \approx 3{,}9$ cm.

Kartion pohjaympyrän säde

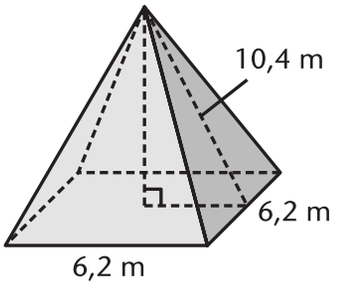
$$\begin{aligned} 2x &= 2 \cdot 3{,}907\ldots \text{ cm} \\ &= 7{,}815\ldots \text{ cm} \\ &\approx 7{,}8 \text{ cm} \end{aligned}$$

VASTAUS Kartion korkeus on 3,9 cm ja pohjaympyrän säde 7,8 cm.

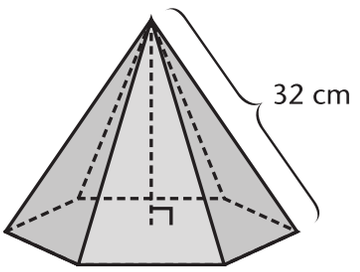
Tehtäviä

Kartion pohjan ja vaipan ala

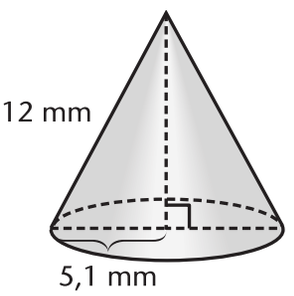
E1 213. Laske pyramidin kokonaispinta-ala.



214. Kartion pohjana on säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 14 cm. Laske kartion
a) pohjan ala
b) vaipan ala.



E2 215. Laske suoran ympyräkartion kokonaispinta-ala.

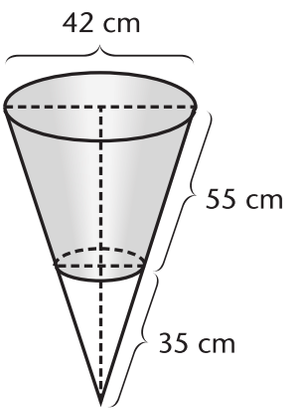


216. Koulun pihalle valmistetaan ontto neliöpohjainen suora pyramidi, jonka sivutahkot ovat lasia. Kuinka paljon lasia pyramidin valmistamiseen tarvitaan, kun pyramidin korkeus on 0,5 m ja pohjan sivun pituus 2,0 m?

217. Mehupurkki on säännöllisen tetraedrin muotoinen, eli purkin jokainen tahko on samankokoinen tasasivuinen kolmio. Tetraedrin särmän pituus on 8,2 cm. Kuinka paljon pahvia mehupurkin valmistukseen kuluu?

218. Intiaanipäällikkö Istuvan Koiran puhvelinnahkaisen teltan korkeus on 3,5 m. Suoran ympyräkartion muotoisen teltan pohjan halkaisija on 2,6 m. Kuinka paljon puhvelinnahkaa teltan valmistukseen on käytetty?

219. Metallinen sanko on muodoltaan katkaistu ympyräkartio. Laske kuvan avulla, kuinka paljon sankoon tarvitaan peltiä.

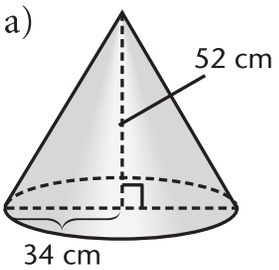


220. Ympyrän säde on 62 cm. Ympyrästä leikataan sektori, jonka keskuskulman suuruus on 110°. Tästä sektorin muotoisesta palasesta valmistetaan suora ympyräkartio. Laske muodostuneen kartion korkeus ja vaipan ala.

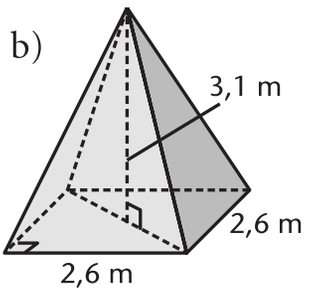
Kartion tilavuus

221. Laske kappaleen tilavuus.

a)

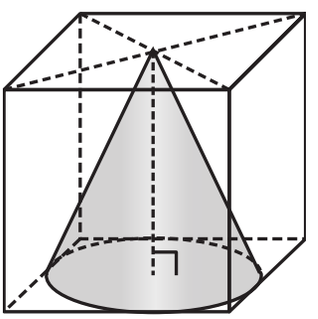


b)

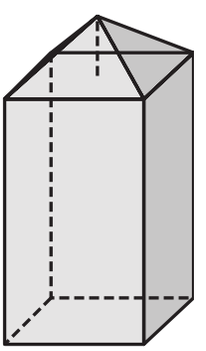


E3 222. Suoran ympyräkartion sivujanan pituus on 15 cm, ja kartion korkeus on 7,4 cm. Laske kartion tilavuus.

223. Viereisen kuution särmä on 16 cm.
a) Laske kuution sisään piirretyn suoran ympyräkartion tilavuus.
b) Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on kartion tilavuutta suurempi?



224. Karkkirasia muodostuu särmiöstä ja kartiosta. Molempien pohjana on neliö, jonka sivun pituus on 7,0 cm. Särmiön korkeus on 20,0 cm ja kartion korkeus 2,0 cm. Laske karkkirasian tilavuus.



225. Puun runkoa pidetään suorana ympyräkartiona. Puun korkeus on 14 m ja tyven läpimitta 24 cm. Vuodessa puu kasvaa pituutta 30 cm, ja sen tyven läpimitta suurenee 4 mm. Kuinka monta dm^3 puun tilavuus tällöin kasvaa viidessä vuodessa? [K1994, 5]

E4 226. Suoran ympyräkartion korkeus on kolme kertaa pohjaympyrän säteen suuruinen. Laske kartion korkeus ja pohjan säde, kun kartion tilavuus on 1200 cm^3.

227. Suoran ympyräkartion pohjan säde on 2,5 cm lyhyempi kuin sivujana. Kartion vaipan ala on 547 cm^2.
a) Laske kartion pohjan säde ja sivujanan pituus.
b) Mikä on kartion tilavuus?

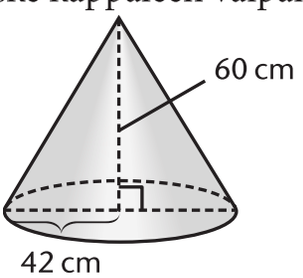
228. Egyptissä sijaitsevan Khafren pyramidin korkeus on ajan mittaan muuttunut. Alun perin Khafren korkeus on ollut 143,5 metriä ja pohjaneliön sivun pituus 214,5 metriä. Korkeus tällä hetkellä on 136 metriä. Oletetaan, että muutos johtuu pelkästään huipulta pudonneista kivistä ja että huippu on tällä hetkellä tasainen.
a) Laske Khafren tilavuus tällä hetkellä.
b) Kuinka monta prosenttia Khafren tilavuus on pienentynyt?

229. Suoran ympyräkartion pohjan säde on neljäsosa kartion korkeudesta. Kartion tilavuus on 660 cm^3. Laske vaipan ala.

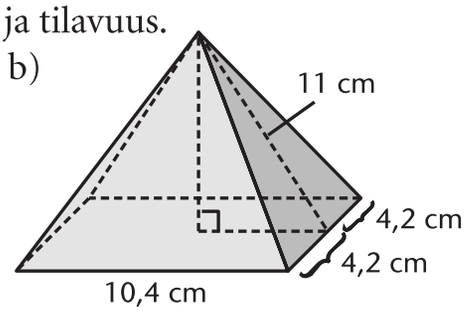
Sekalaisia tehtäviä

230. Laske kappaleen vaipan ala ja tilavuus.

a)



b)



231. Suoran ympyräkartion muotoisen jäävuoren koko korkeudesta 30 % näkyy merenpinnan yläpuolella.
a) Laske jäävuoren näkyvän osan vaipan ala, kun merenpinnan yläpuolisen osan ympärysmitta on 345 m ja sivujanan pituus 63 m.
b) Laske jäävuoren todellinen korkeus metrin tarkkuudella.

232. Suoran ympyräkartion sivujanan pituus on 28,5 cm. Laske kartion tilavuus litroina, kun kartion korkeus on 20,4 cm.

233. Suoran pyramidin tilavuus on 3500 m^3. Pyramidin pohja on neliön muotoinen. Laske neliön sivun pituus, kun pyramidin korkeus on 25 m.

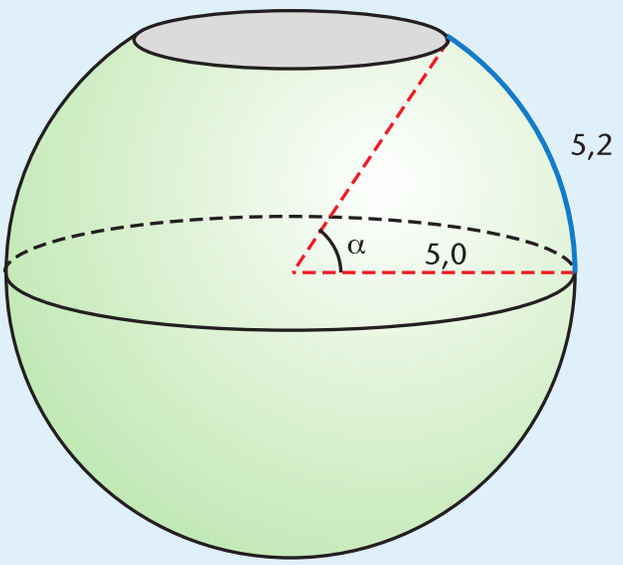
234. Kioskissa jäätelöpallo asetetaan suoran ympyräkartion muotoiseen tötteröön, joka on valmistettu vohvelista. Vohvelia valmistukseen kuluu 145 cm^2. Kartion suuaukon halkaisija on 7,5 cm. Kuinka korkea vohvelikartio on?

3.3 Pallo

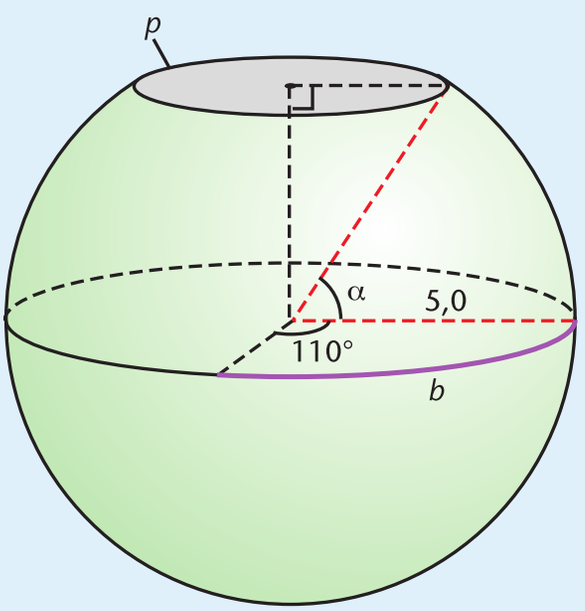
POHDINTA 1

Pallon säde on 5,0 m.

a) Pallon pinnalla olevaa 5,2 metrin kaarta vastaa keskuskulma α. Laske tämän kulman asteluku.



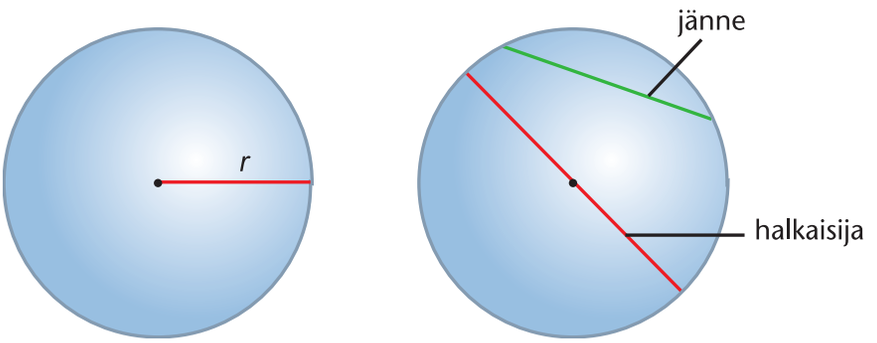
b) Kaari b sijaitsee pallon ”päiväntasaajalla”. Laske kaaren b pituus.



c) Pallosta on leikattu pois palanen, jolloin syntynyt harmaa leikkauspinta on ympyrä. Laske ympyrän kehän p pituus.

Pallon tilavuus ja pinta-ala

Pallopinta on niiden avaruuden pisteiden joukko, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä pisteestä. Tätä kiinteätä pistettä sanotaan **keskipisteeksi**. Keskipisteen ja minkä tahansa pallopinnalla sijaitsevan pisteen välinen jana on **säde**. Sädettä merkitään usein kirjaimella r. Pallopinnan rajoittamaa kolmiulotteista kappaletta sanotaan **palloksi**.



Kahden pallopinnalla sijaitsevan pisteen välistä janaa sanotaan **jänteeksi**. Jos jänne kulkee keskipisteen kautta, sitä kutsutaan **halkaisijaksi**. Halkaisija on siis kaksi kertaa niin pitkä kuin säde. Lyhin tie pallopinnan pisteestä toiseen on pitkin niitä yhdistävää jännettä.

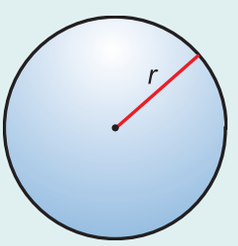
Pallo on symmetrisin kaikista avaruuskappaleista, ja sillä on monia erityisominaisuuksia. Pallolla on esimerkiksi seuraava ominaisuus: kaikista fyysisistä kappaleista, joiden massa on sama, pallon vierintävastus on pienin. Tämän vuoksi pallon muotoa hyödynnetään monissa tekniikan sovelluksissa.

Pallon pinta-ala ja tilavuus voidaan laskea säteen avulla.

PALLO

pinta-ala $A_{\text{pallopinta}} = 4\pi r^2$

tilavuus $V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r^3$



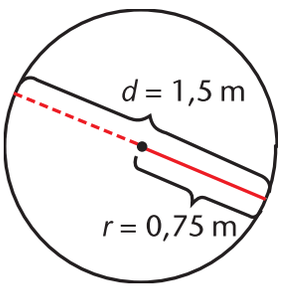
Kaikista avaruuskappaleista, joiden tilavuus on sama, pallon pinta-ala on pienin. Tämä on yksi syy sille, että pallon muotoisia kappaleita esiintyy niin usein luonnossa. Samasta syystä esimerkiksi säiliöt kannattaa valmistaa pallon muotoisiksi, mikäli se muuten on mahdollista.

ESIMERKKI 1 Pallon muotoinen öljysäiliö, jonka sisähalkaisija on 1,5 m, ostettiin täyteen polttoöljyä. Kuinka paljon öljy maksoi, kun sen litrahinta oli 0,41 euroa?

RATKAISU Lasketaan ensin ostetun öljyn määrä, joka on sama kuin säiliön tilavuus.

Koska öljysäiliön sisähalkaisija on $d = 1{,}5$ m, niin sen sisäsäde on

$$r = \frac{1{,}5 \text{ m}}{2} = 0{,}75 \text{ m}.$$



Pallon tilavuus on

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi(0{,}75 \text{ m})^3 = 1{,}7671\ldots \text{ m}^3$$

Ilmoitetaan tilavuus litroina.

Yksikkömuunnokset s. 147

$$1{,}7671\ldots \text{ m}^3 = 1767{,}1\ldots \text{ dm}^3 = 1767{,}1\ldots \text{ l}$$

Kokonaishinta saadaan kertomalla öljyn määrä sen litrahinnalla.

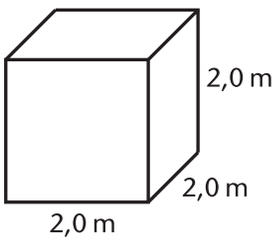
Polttoöljy maksoi siis yhteensä

$$1767{,}1\ldots \text{ l} \cdot 0{,}41 \text{ €/l} = 724{,}529\ldots \text{ €}$$

VASTAUS Polttoöljy maksoi 724,53 €.

ESIMERKKI 2 Pallon tilavuus on sama kuin sellaisen kuution, jonka särmän pituus on 2,0 m. Kuinka monta prosenttia kuution ala on pallon alaa suurempi?

RATKAISU Lasketaan ensin kuution ja pallon pinta-alat ja sen jälkeen näiden suhde.



Koska kuution särmän pituus on 2,0 m, niin sen pinta-alaksi saadaan

$$A_{\text{kuutio}} = 6 \cdot (2\ \text{m})^2 = 6 \cdot 4\ \text{m}^2 = 24\ \text{m}^2$$

Pallon pinta-alan määrittämiseksi on tiedettävä sen säteen pituus. Merkitään sitä kirjaimella r. Koska pallon tilavuus on sama kuin kuution, niin

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = V_{\text{kuutio}}$$

Kuution tilavuus $V_{\text{kuutio}} = (2\ \text{m})^3 = 2^3\ \text{m}^3 = 8\ \text{m}^3$.

Saadaan yhtälö $\frac{4}{3}\pi r^3 = 8$. Ratkaistaan tästä säde r.

Tapa 1

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 8 \quad \Big| : \frac{4}{3}\pi$$

$$r^3 = \frac{8}{\frac{4}{3}\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{8}{\frac{4}{3}\pi}} = 1{,}24\ldots\ (\text{m})$$

Tapa 2

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 8 \quad \Big| \cdot 3$$

$$4\pi r^3 = 24 \quad \Big| : 4\pi$$

$$r^3 = \frac{24}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{24}{4\pi}} = 1{,}24\ldots\ (\text{m})$$

Näin ollen pallon pinta-ala on

$$A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (1{,}24\ldots\ \text{m})^2 = 19{,}343\ldots\ \text{m}^2$$

Kuution ja pallon pinta-alojen suhde on

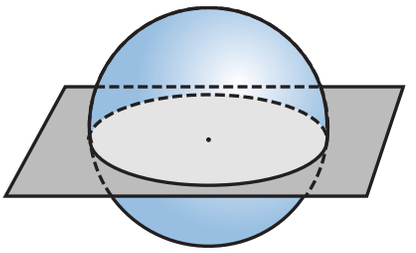
$$\frac{A_{\text{kuutio}}}{A_{\text{pallo}}} = \frac{24\ \text{m}^2}{19{,}343\ldots\ \text{m}^2} = 1{,}2407\ldots \approx 124\ \%$$

VASTAUS Kuution ala on 24 % suurempi.

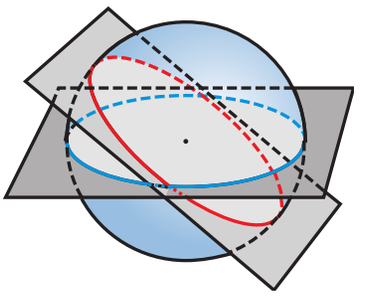
124 % – 100 % = 24 %

Maapallon pituus- ja leveyspiirit

Kun pallo leikataan tasolla, tasolle muodostuva leikkauskuvio on aina joko ympyrä tai piste.

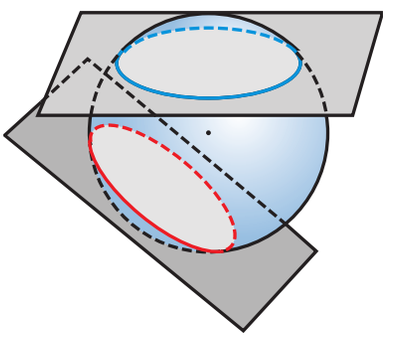


Suurin mahdollinen ympyrä syntyy, kun leikkaava taso kulkee pallon keskipisteen kautta. Tällaisia ympyröitä sanotaan **isoympyröiksi**. Isoympyrän säde on aina sama kuin pallon säde.



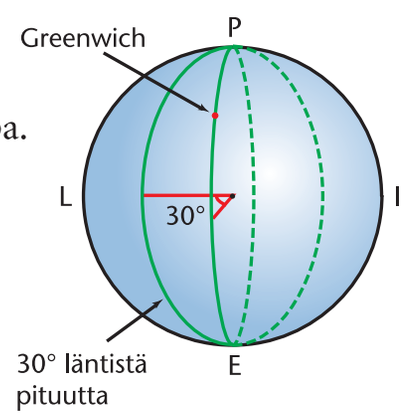
Lyhin tie kolmiulotteisessa avaruudessa pallon pisteestä toiseen on pitkin niitä yhdistävää jännettä. Mikäli reitin täytyy sijaita pallon pinnalla, niin lyhin tie on pitkin pisteiden kautta kulkevaa isoympyrää.

Jos leikkaava taso ei kulje pallon keskipisteen kautta, leikkausympyrän säde on pienempi kuin pallon säde. Tällaisia ympyröitä sanotaan **pikkuympyröiksi**. Kun tason etäisyys pallon keskipisteestä kasvaa, pikkuympyrän säde pienenee.

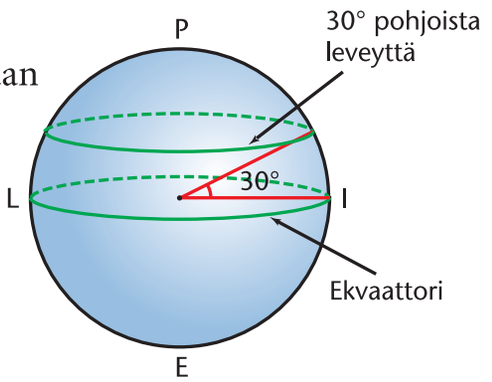


Planeettamme Maa on likimain pallo. Se on kuitenkin navoiltaan jonkin verran litistynyt, minkä vuoksi sen säde vaihtelee välillä 6356,755 km – 6378,140 km. Tehtävissä Maata käsitellään pallona, jonka säde on vakio.

Pituuspiirit eli **meridiaanit** ovat isoympyröiden puolikkaita, joiden päätepisteinä ovat etelä- ja pohjoisnapa. **Nollameridiaani** on se meridiaani, joka kulkee Lontoossa sijaitsevan Greenwichin tähtitornin kautta. Muiden pituuspiirien paikka ilmaistaan sen etäisyytenä asteina nollameridiaanista itään tai länteen. Pituuspiirin asteluku tarkoittaa pituuspiirin ja nollameridiaanin välisen kaaren astelukua.



Leveyspiireistä **päiväntasaaja** eli **ekvaattori** on pituuspiirejä vastaan kohtisuorassa oleva isoympyrä. Muut leveyspiirit ovat päiväntasaajan kanssa yhdensuuntaisia pikkuympyröitä. Niiden paikka ilmaistaan etäisyytenä asteina päiväntasaajasta joko etelään tai pohjoiseen. Leveyspiirin asteluku on leveyspiirin ja päiväntasaajaan välisen kaaren asteluku.



Paikan sijainti maapallolla voidaan kertoa ilmoittamalla paikan pituus- ja leveyspiiri. Esimerkiksi Helsingin sijainti on 60° pohjoista leveyttä ja 25° itäistä pituutta. Helsingin sijainti voidaan myös merkitä lyhyesti 60° N 25° E.

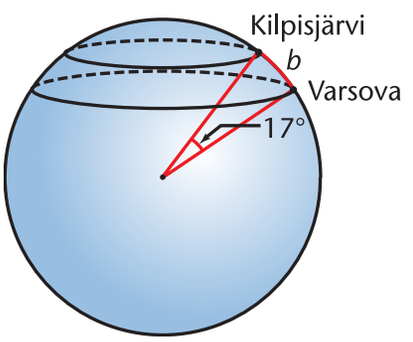
ESIMERKKI 3

Kilpisjärvi ja Varsova sijaitsevat molemmat likimain samalla pituuspiirillä, noin 21° Greenwichistä itään. Kilpisjärvi on leveysasteella 69° ja Varsova leveysasteella 52°. Mikä on Kilpisjärven ja Varsovan välinen etäisyys maapallon pintaa pitkin? Maapallon säde on 6370 km.

RATKAISU

Kilpisjärven ja Varsovan leveysasteiden erotus on $69° - 52° = 17°$.

Kilpisjärven ja Varsovan välinen etäisyys on sama kuin kuvan kaaren pituus b.



Kaaren pituus

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

$$b = \frac{17°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km} = 1890{,}01... \text{ km} \approx 1900 \text{ km}$$

VASTAUS

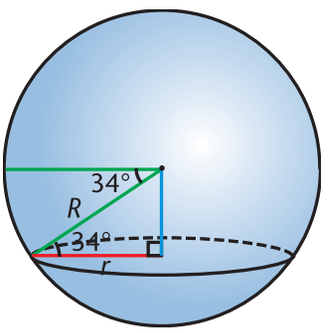
Kilpisjärven ja Varsovan välinen etäisyys on noin 1900 km.

ESIMERKKI 4

Lentokone lentää seuraten eteläistä 34. leveyspiiriä Kapkaupungista suoraan länteen Buenos Airesiin. Kuinka kauan matka kestää, kun lentokoneen nopeus on 750 km/h ja lentokorkeus 10 500 m? Kapkaupungin sijainti on 18° itäistä pituutta ja 34° eteläistä leveyttä. Buenos Airesin sijainti puolestaan on 58° läntistä pituutta ja 34° eteläistä leveyttä. Maapallon säde on 6370 km.

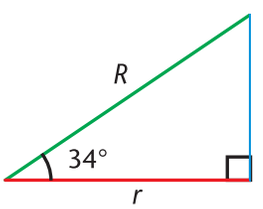
RATKAISU

Tilannetta voidaan havainnollistaa kuvalla, jossa maapallon säteen pituutta on merkitty kirjaimella R ja 34. leveyspiirin sädettä kirjaimella r.



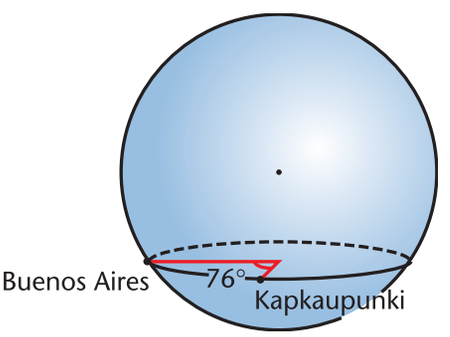
Lasketaan ensin lentomatka.

34. leveyspiirin säde r saadaan ratkaistua suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusana on maapallon säde R.



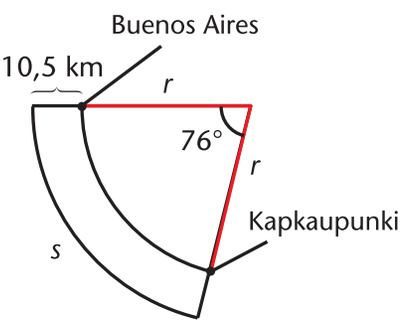
$$\cos 34° = \frac{r}{R} \quad \Big| \cdot R$$
$$r = R\cos 34°$$

Maapallon säde on 6370 km, joten 34. leveyspiirin säde on



$$r = 6370\text{ km} \cdot \cos 34°$$
$$= 5280{,}969\ldots\text{ km}$$

Koska lentokorkeus on 10 500 m = 10,5 km, niin lentomatkaksi s saadaan



$$s = \frac{18° + 58°}{360°} 2\pi(r + 10{,}5\text{ km})$$
$$= \frac{76°}{360°} 2\pi(5280{,}969\ldots\text{ km} + 10{,}5\text{ km})$$
$$= 7018{,}870\ldots\text{ km}$$

Kysytty lentoaika on siis

$$t = \frac{s}{v} = \frac{7018{,}870\ldots\text{ km}}{750\text{ km/h}} = 9{,}35\ldots\text{ h} \approx 9\text{h } 22\text{min}$$

VASTAUS

Lentoaika on noin 9 tuntia 22 minuuttia.

Tehtäviä

Pallon tilavuus ja pinta-ala E1

235. Pallon säde on 2,4 m. Laske pallon tilavuus ja pinta-ala.

236. Puolipallon muotoisen kastikekauhan halkaisija on 6,5 cm. Kuinka paljon kauhaan mahtuu kastiketta? Ilmoita vastaus desilitroina.

237. Muovisen puhallettavan rantapallon halkaisija on 5,2 dm.
a) Kuinka monta litraa ilmaa pallon sisällä on?
b) Kuinka paljon muovia pallon valmistukseen on käytetty?

238. Yleisurheilussa käytettävän raudasta valmistetun kuulan halkaisija on 12,16 cm. Mikä on kuulan massa, kun siihen käytetyn raudan tiheys on 7708 kg/m^3?

239. Tennispalloja myydään suoran ympyrälieriön muotoisissa kolmen pallon pakkauksissa. Pakkauksen pohjan säde on 3,5 cm ja korkeus on 21 cm. Kuinka monta prosenttia pakkauksessa on tyhjää tilaa?

240. Juustokupu on puolipallon muotoinen. Kuinka paljon muovia tarvitaan sen valmistukseen, kun puolipallon halkaisija on 19,0 cm?

241. Saippuakuplan pudotessa lattialle muodostuu puolipallo. Kuinka suuri on puolipallon säde, kun saippuakuplan säde on 3,0 cm? Saippuakuplalla ja puolipallolla on sama tilavuus.

E2 242. Pallolla ja kuutiolla on sama tilavuus, 160 cm^3. Kuinka monta prosenttia pallon ala on kuution kokonaispinta-alasta?

243. Muovista valmistetaan tilavuudeltaan yhtä suuria pallon ja suoran ympyrälieriön muotoisia säiliöitä. Ympyrälieriön pohjan halkaisija ja pallon halkaisija ovat samat. Lisäksi säiliöiden seinämät ovat saman paksuiset. Kuinka monta prosenttia enemmän muovia tarvitaan suoran ympyrälieriön muotoiseen säiliöön pallon muotoiseen säiliöön verrattuna?

244. Veneen kiinnityspoiju muodostuu ympyräpohjaisesta kartiosta (korkeus 65 cm) ja puolipallosta (halkaisija 70 cm). Kiinnityspoiju valmistetaan muovista ja jätetään sisältä ontoksi. Kuinka paljon muovia poijun valmistamiseen tarvitaan?

245. Kuinka monta prosenttia pallon pinta-ala kasvaa, kun sen säde kasvaa
a) 20 % b) 50 %?

246. Suoran ympyräkartion sisällä on suurin mahdollinen pallo. Kartion pohjaympyrän säde on 15 cm, ja kartion korkeus on 24 cm. Laske pallon tilavuus.

Maapallon pituus- ja leveyspiirit

E3 247. Laske päiväntasaajan ja Kauriin kääntöpiirin (23,5° eteläistä leveyttä) välinen etäisyys maanpintaa pitkin. Maan säde on 6370 km.

248. Lentotukialuksen sijainti Tyynellämerellä on 22° pohjoista leveyttä ja 143° läntistä pituutta. Samassa pisteessä, mutta 1,5 km:n syvyydessä, on sukellusvene. Sukellusvene seuraa laivaa samassa syvyydessä, kun laiva kulkee pitkin 143. pituuspiiriä aina leveyspiirille 8° (eteläistä leveyttä). Kuinka suuri ero on sukellusveneen ja laivan kulkemissa matkoissa?

249. Tietoliikennesatelliitti on suoraan päiväntasaajan yläpuolella 30 000 kilometrin korkeudessa. Mille pohjoiselle leveysasteelle ulottuu satelliitin näkyvyysalue, kun maan säde on 6370 km?

E4 250. Risteilyalus ylittää Atlantin valtameren. Se lähtee Agadirin satamasta, jonka sijainti on 30 astetta pohjoista leveyttä ja 10 astetta läntistä pituutta. Alus kulkee pitkin 30. leveyspiiriä, kunnes saapuu samalla leveyspiirillä sijaitsevaan Jacksonvillen kaupunkiin Yhdysvalloissa. Kaupunki sijaitsee 83. pituuspiirillä (läntistä pituutta). Laske laivan kulkeman matkan pituus. Maapallon säde on 6370 km.

251. Viljami asuu Oulussa. Laske Viljamin nopeus maapallon pyöriessä akselinsa ympäri, kun Oulu sijaitsee 65. leveyspiirillä. Maan säde on 6370 km.

Sekalaisia tehtäviä

252. Kurpitsa on pallon muotoinen, ja sen halkaisija on 43,0 cm.
a) Laske kuoren pinta-ala.
b) Laske kurpitsan tilavuus.

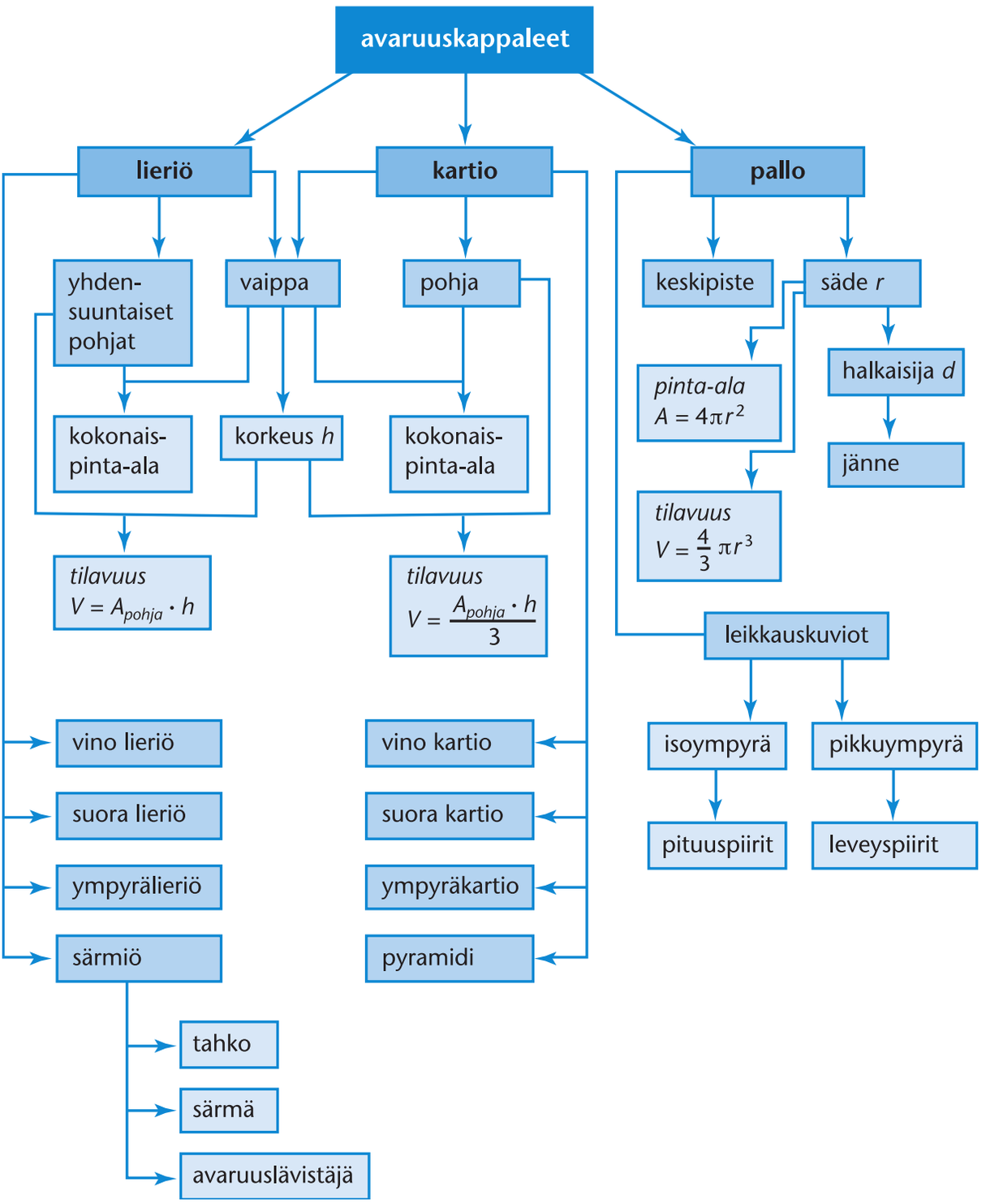
253. Jäätelöannos sisältää kaksi jäätelöpalloa, joiden halkaisija on 5,0 cm. Mikä on jäätelön litrahinta, kun annos maksaa kaksi euroa?

254. Pallon tilavuus on 125 cm^3. Laske pallon säde.

255. Helsingin sijainti on 60° pohjoista leveyttä 25° itäistä pituutta. Jos lähtisit Helsingistä ja kulkisit koko ajan itään pitkin maapallon pintaa, kuinka pitkän matkan kuljettuasi saapuisit takaisin Helsinkiin? Maapallon säde on 6370 km.

256. Kuinka monta kilogrammaa ilmaa mahtuu ilmapalloon, jonka säde on 1,60 m? Litra ilmaa painaa 1,29 g. [S1988, 5b]

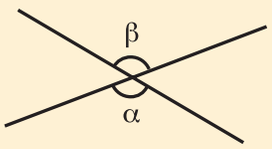
Keskeisiä käsitteitä



4 Kertausosa

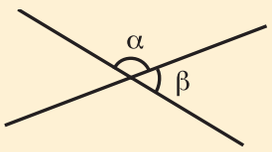
Kulmia

- **Ristikulmat**



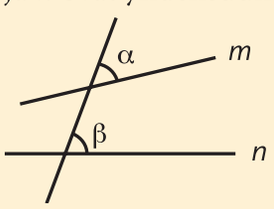
$\alpha = \beta$

- **Vieruskulmat**

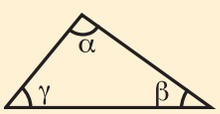


$\alpha + \beta = 180°$

- **Samankohtaiset kulmat** α ja β (ovat yhtä suuret, jos suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset)

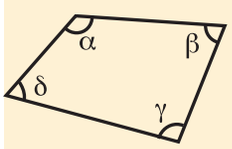


- **Kolmion kulmien summa**



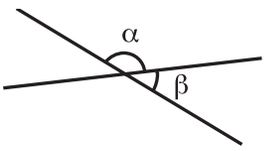
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

- **Nelikulmion kulmien summa**

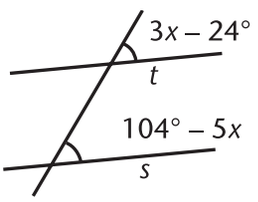


$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

1. Laske kulmat α ja β, kun α on 37° suurempi kuin β.



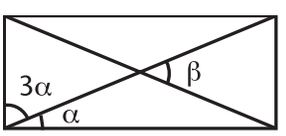
2. Ratkaise x, kun suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset.



3. Kolmion pisin sivu on kolme kertaa lyhyimmän sivun mittainen. Toiseksi pisin sivu on 15 cm pidempi kuin lyhyin sivu. Laske sivujen pituudet, kun kolmion piiri on 120 cm.

4. Suunnikkaan terävän kulman ja tylpän kulman suhde on 2:5. Laske kulmat asteen tarkkuudella.

5. Laske kulmat α ja β, kun kuvio on suorakulmio.

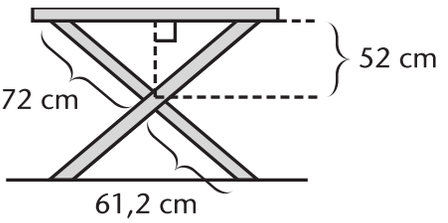


Yhdenmuotoisuus

- **Tasokuviot ovat yhdenmuotoiset, kun**
  – niiden kaikkien vastinsivujen suhde on vakio
  – niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret.

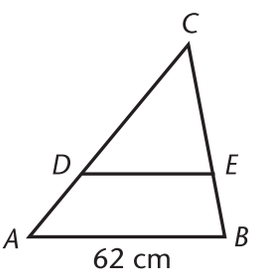
- **kk-lause:** Jos kahdessa kolmiossa on kaksi yhtä suurta kulmaa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

6. Laske pöydän korkeus.



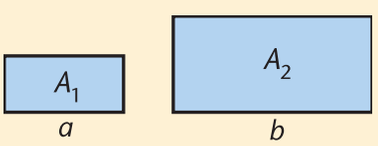
7. Suorakulmaisen kolmion sisällä on suurin sellainen neliö, jonka kanta sijaitsee kolmion toisella kateetilla. Laske neliön sivun pituus, kun kolmion kateetit ovat 5,0 m ja 4,0 m.

8. Janat AB ja DE ovat yhdensuuntaisia. Niiden välinen etäisyys on 18 cm. Laske kolmion ABC ala, kun $AD:DC = 1:3$.



Yhdenmuotoisuussuhde

- **Mittakaava**
  = vastinsivujen suhde
  $k = \frac{a}{b}$



- **Pinta-alojen suhde**
  = mittakaavan neliö
  $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = k^2$

9. Hääkuvassa miehen pituus on 8,8 cm ja vaimon pituus 7,8 cm. Kuinka pitkä vaimo on luonnollisessa koossaan, kun miehen pituus on 187 cm? (cm:n tarkkuus)

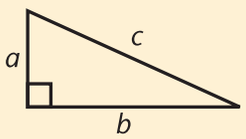
10. Suorakulmion muotoisen urheilukentän ala kartalla on 20 cm^2. Mikä on kentän todellinen ala, kun kartan mittakaava on 1:2000?

11. Kahden yhdenmuotoisen kuvion mittakaava on 2:5. Kuinka monta prosenttia pienempi kuvio on suuremmasta kuviosta?

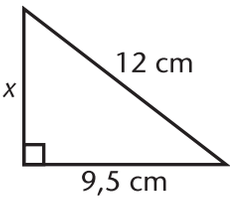
12. Valokuvaa suurennetaan 25 %. Kuinka monta prosenttia kasvaa kuvan pinta-ala?

Pythagoraan lause

- $a^2 + b^2 = c^2$



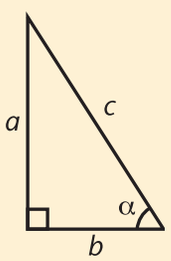
13. Laske sivun x pituus.



14. Suorakulmaisen kolmion kateeteista toinen on 3,0 cm lyhyempi kuin toinen. Laske kateettien pituudet, kun hypotenuusan pituus on 22 cm.

15. Kaupan sisäänkäynnissä on liikuntaesteiselle suunniteltu luiska, jonka pituus on 2,4 m. Kuinka korkea portaikko on, kun luiskan pää on 2,3 metrin päässä ovesta?

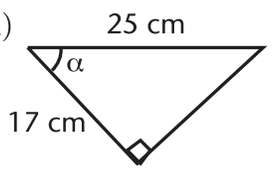
Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa



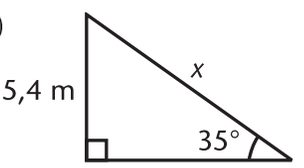
- **Sini** $\sin\alpha = \frac{a}{c}$
- **Kosini** $\cos\alpha = \frac{b}{c}$
- **Tangentti** $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

16. Ratkaise kohdassa a kulma α ja kohdassa b sivun x pituus.

a)



b)



17. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 12 cm ja 18 cm. Laske kolmion kulmien suuruudet.

18. Kaksi laivaa ovat vastakkaisilla puolilla majakkaa. Toisesta laivasta 15 m korkean majakan huippu näkyy 12°:n kulmassa, toisesta taas 8,5°:n kulmassa. Mikä on laivojen välinen etäisyys?

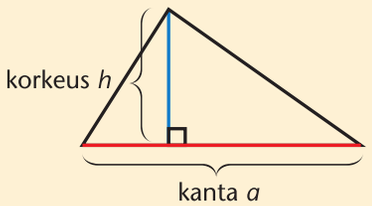
19. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 42°. Kolmion korkeus on 11 cm. Laske kolmion sivujen pituudet.

20. Puu on kallistunut 8,5 astetta pystysuorasta asennosta. Puun latvasta tipahtaa pähkinä suoraan alaspäin. Putoamispaikka on 2,5 m:n päässä puusta. Kuinka pitkä puu on?

Pinta-aloja

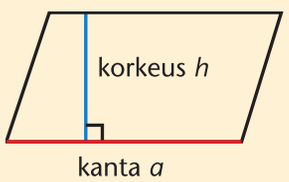
- **Kolmion pinta-ala**

$$A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{1}{2}ah$$



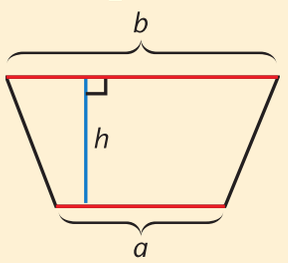
- **Suorakulmion ala ja suunnikkaan pinta-ala**

$A = ah$



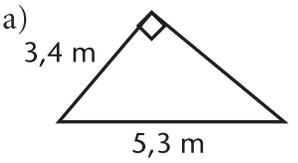
- **Puolisuunnikkaan pinta-ala**

$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$

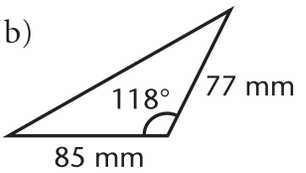


21. Laske kolmioiden alat.

a)



b)



22. Tasasivuisen kolmion korkeus on 12,0 cm. Laske kolmion ala.

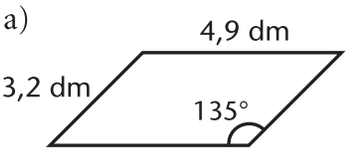
23. Suorakulmaisen kolmion ala on 38 cm^2. Laske kateettien pituudet, kun niiden pituusero on 5,0 cm.

24. Kolmion kannan ja korkeuden summa on 23 cm. Laske kannan pituus, kun kolmion ala on 45 cm^2.

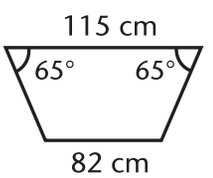
25. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 28° ja kolmion kanta on 44 cm. Laske kolmion ala.

26. Laske nelikulmioiden alat.

a)



b)



27. Suorakulmion muotoisen olohuoneen pituus on 5,0 m pienempi kuin leveys. Laske huoneen mitat, kun sen ala on 84 m^2.

28. Puolisuunnikkaan erisuuntaisista sivuista toinen on kohtisuorassa yhdensuuntaisia sivuja vastaan. Sen pituus on sama kuin yhdensuuntaisista sivuista lyhyemmän. Yhdensuuntaisten sivujen pituusero on 3,0 m. Laske sivujen pituudet, kun kuvion ala on 162 m^2.

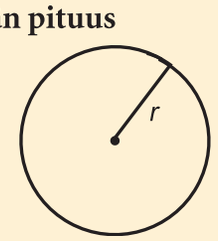
Kehän pituus ja ala

- **Ympyrän kehän pituus**

$p = 2\pi r = d\pi$

- **Ympyrän ala**

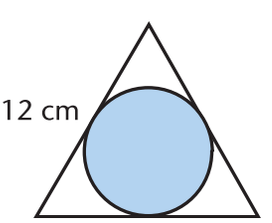
$A = \pi r^2$



29. Kultasormuksen ulkopintaan on upotettu vieri viereen timantteja. Yksi timantti tarvitsee tilaa 2,0 mm. Kuinka monta jalokiveä sormukseen mahtuu, kun sormuksen halkaisija on 1,8 cm?

30. Ympyrän ala on 36 cm^2. Laske kehän pituus.

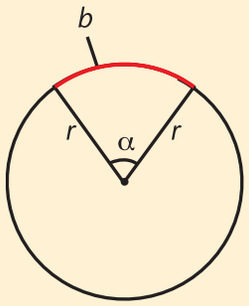
31. Laske kuvan ympyrän ala, kun kolmio on tasasivuinen.



Sektori ja segmentti

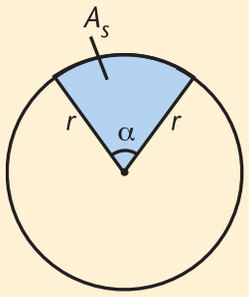
- **Sektorin kaaren pituus**

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$



- **Sektorin pinta-ala**

$$A_s = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$



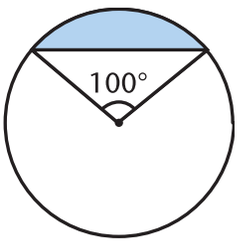
- **Segmentin alan laskeminen**

32. Sektorin, jonka keskuskulma on 30°, pinta-ala on 250 cm^2. Kuinka pitkä on ympyrän säde?

33. Ympyräsektorin kaaren pituus on 4,2 dm. Kaarta vastaava keskuskulma on 15°. Laske ympyrän säteen ja kehän pituudet.

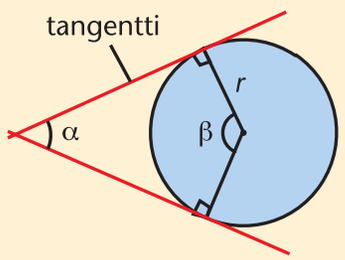
34. Sektorin kaaren pituus on sama kuin ympyrän säteen pituus 75 cm. Kuinka suuri on tätä kaarta vastaava keskuskulma?

35. Laske väritetyn segmentin ala, kun ympyrän säde on 25 mm.



Ympyrän tangentti

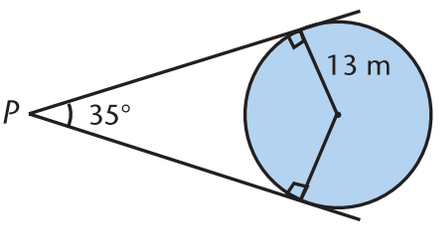
- Tangentti on **suora**, joka sivuaa ympyrän kehää vain yhdessä pisteessä. Tangentti on **kohtisuorassa** tähän pisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.



- **Tangenttikulma** α on kahden tangentin väliin muodostuva kulma.

$$\alpha + \beta = 180°$$

36. Laske pisteen P etäisyys ympyrän kehästä.



37. Kuinka kauas 35 metriä korkean radiomaston lähetysalue ulottuu? Maapallon säde on 6370 km.

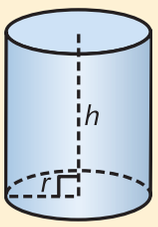
38. Sukkula kiertää maata 350 km:n korkeudella. Kuinka suuren osan maapallon ympärysmitasta lentäjä voi yhdellä silmäyksellä nähdä?

39. Viljo seisoo 150 m:n päässä ympyrän muotoisesta amfiteatterista, jonka halkaisija on 62 m. Laske lyhin matka teatterin ympäri.

40. Pallon halkaisija on 38 cm. Kuinka suuren osan pallon kehästä näkee pieni hyttynen, joka leijailee 35 cm:n etäisyydellä pallosta? Hyttysen koko voidaan ajatella pistemäiseksi pallon kokoon verrattuna.

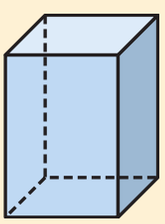
Lieriö

- Jos lieriön pohjat ovat ympyröitä, lieriötä sanotaan **ympyrälieriöksi.**



r on pohjaympyrän säde.
h on lieriön korkeus.

- Jos lieriön pohjat ovat monikulmioita, lieriötä sanotaan **särmiöksi**.



- **Suoran lieriön vaipan ala ja tilavuus**

$A_{\text{vaippa}} = \text{pohjan piiri} \cdot \text{korkeus}$

$V = \text{pohjan ala} \cdot \text{korkeus}$

- **Ympyrälieriön vaipan ala ja tilavuus**

$A_{\text{vaippa}} = 2\pi rh$

$V = \text{pohjan ala} \cdot \text{korkeus}$
$= \pi r^2 h$

41. Tonnikalapurkin pohjaympyrän säde on yhtä suuri kuin purkin korkeus. Laske purkin pohjan halkaisija, kun purkkiin mahtuu 1,2 dl tonnikalahiutaleita.

42. Suoran särmiön pohja on neliö, jonka sivun pituus on 3,0 dm. Särmiön korkeus on 5,0 dm. Laske särmiön avaruuslävistäjän pituus.

43. Laske jääkuution särmän pituus, kun se painaa 16,1 g ja jään tiheys on 0,917 kg/l.

44. Kuution sisällä on suurin mahdollinen suora ympyrälieriö. Lieriön pohja on kuution pohjaa vasten. Lieriö ja kuutio ovat yhtä korkeita. Kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kuution tilavuudesta?

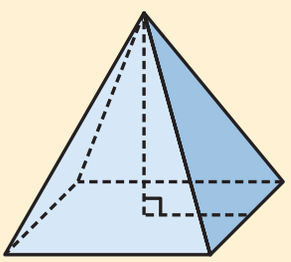
45. Suoran särmiön pohja on säännöllinen 8-kulmio, jonka sivun pituus on 3,4 cm. Särmiön korkeus on 10,2 cm. Laske särmiön kokonaispinta-ala.

Kartio

- Jos kartion pohja on ympyrä, kartiota sanotaan **ympyräkartioksi**.
- Jos kartion pohja on monikulmio, kartiota sanotaan **pyramidiksi**.
- **Pyramidin vaipan ala ja tilavuus**

A_{vaippa} = sivutahkoina olevien kolmioiden pinta-alojen summa

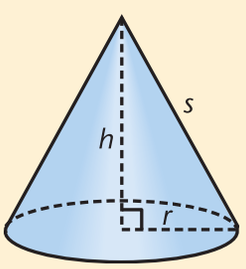
$$V = \frac{\text{pohjan ala} \cdot \text{korkeus}}{3}$$



- **Ympyräkartion vaipan ala ja tilavuus**

$$A_{\text{vaippa}} = \pi rs$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

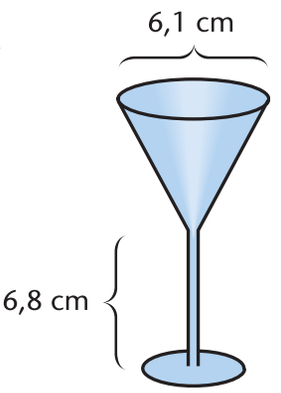


46. Suoran ympyräkartion korkeus on 12 dm ja pohjaympyrän halkaisija on 8,0 dm. Laske kartion tilavuus ja vaipan ala.

47. Suoran kartion pohja on säännöllinen 5-kulmion, jonka sivun pituus on 4,1 m. Laske kartion vaipan ala, kun sen korkeus on 6,4 m.

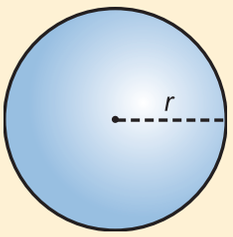
48. Ympyrän muotoisesta paperista leikataan sektorin muotoinen pala, jonka keskuskulma on 170°. Ympyrän säde on 5,4 dm. Sektorista taitetaan suora ympyräkartio. Laske tämän kartion tilavuus.

49. Samppanjalasiin mahtuu 12 cl. Laske lasin korkeus.



50. Suoran ympyräkartion pohjan halkaisijan ja korkeuden suhde on 2:3. Laske kartion vaipan ala, kun sen tilavuus on 1200 cm^3.

Pallo



- **Pallon pinta-ala**
  $A = 4\pi r^2$

- **Pallon tilavuus**
  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

51. Rantapalloon mahtuu 33,0 litraa ilmaa. Kuinka paljon muovia pallon valmistukseen on käytetty? Vastaus neliödesimetreinä.

52. Määritä kuution sisällä olevan suurimman mahdollisen pallon pinta-alan ja kuution kokonaispinta-alan suhde.

53. Valkoisesta savulasista valmistetaan pallon muotoinen kattovalaisin. Valaisimen säde on 16 cm. Lasin paksuus on 2,0 mm. Kuinka paljon valaisin painaa, kun lasin tiheys on 2,5 kg/dm^3?

54. Laske Kauriin kääntöpiirin (23,5° eteläistä leveyttä) ja Kravun kääntöpiirin (23,5° pohjoista leveyttä) välinen etäisyys. Maapallon säde on 6370 km.

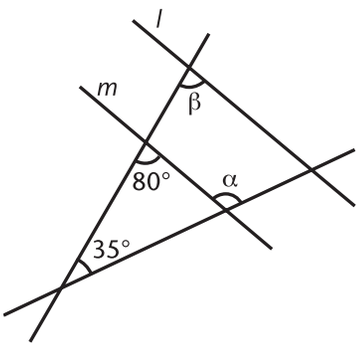
55. Painonnostaja kannattelee päänsä yläpuolella tankoa, jonka molemmissa päissä on pallon muotoiset punnukset. Tangon pituus on 1,5 m ja tangon halkaisija on 1,9 cm. Pallon säde on 14 cm. Kuinka suurta massaa nostaja kannattelee, kun kyseisen metallin tiheys on 7,8 kg/dm^3?

56. Suoran ympyrälieriön korkeus ja pohjaympyrän halkaisija ovat yhtä suuret kuin lieriön sisällä olevan pallon halkaisija. Laske pallon tilavuuden ja lieriön tilavuuden suhde.

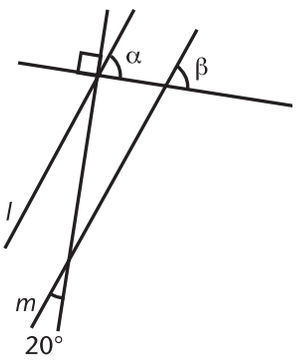
1. Harjoituskoe

1. Laske kulmat α ja β, kun suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset.

a)



b)



2. Järvi on likimain suorakulmion muotoinen, 100 m leveä ja 650 m pitkä. Keskellä järveä on likimain ympyrän muotoinen saari, jonka halkaisija on 20 m.
   a) Mikä on lyhin matka rannalta saareen?
   b) Reijo katselee saarta rannalta, järven pidemmän sivun puolesta välistä. Hän lähtee kohtisuorasti kävelemään takaisin kotiin, joka on 50 m:n päässä rannalta. Kuinka suuressa kulmassa saari näkyy Reijon kotoa?
   c) Eräänä päivänä satoi 8 mm. Paljonko järven vesimäärä kasvaa? Ilmoita vastaus litroina.

3. Susanna (15 v) ja Lassi (7 v) jakavat pyöreän pizzan ikävuosiensa suhteessa kahteen sektorin muotoiseen palaan.
   a) Laske pizzojen keskuskulmien suuruudet.
   b) Susanna jättää reunan syömättä. Kuinka pitkä reuna on, jos pizzan säde on 15 cm?

4. Vuoren korkeus on 730 m. Vuoren huippu näkyy tällä hetkellä laivalta 20°:n kulmassa horisontin yläpuolella. Kuinka paljon lähemmäksi laivan on tultava, että huippu näkyisi 42°:n kulmassa?

5. Vohvelista valmistettu jäätelötötterö on suoran ympyräkartion muotoinen, 12,5 cm korkea ja suustaan 5,0 cm leveä. Laske vohvelikartion a) tilavuus b) pinta-ala.

6. Suorakulmion muotoisen rakennuksen ulkomitat myyntiesitteessä ovat 40 mm × 25 mm. Luonnossa rakennuksen pohjapinta-ala on 10 m^2.
   a) Laske esitteen mittakaava. b) Mitkä ovat rakennuksen mitat luonnossa?

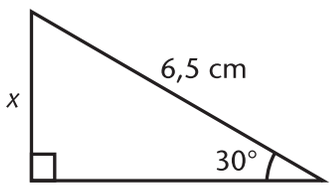
7. Liisa voi kulkea koulumatkansa kahdella tavalla. Hän voi kulkea kohtisuoraan 2,0 km pitkää pikkutietä maantielle, josta on 1,0 km:n matka koululle. Tällöin aikaa kuluu 30 min. Toinen vaihtoehto on suunnata suoraan metsän poikki koululle.
   a) Kuinka pitkä matka on suoraan metsän läpi?
   b) Paljonko aikaa kuluu metsän läpi kuljettaessa samalla nopeudella?

8. Satelliitti on pohjoisnavan yläpuolella. Maapallo näkyy satelliitista 86,0°:n kulmassa. Maapallon säde on noin 6370 km.
   a) Laske satelliitin etäisyys maanpinnasta.
   b) Kuinka etäälle pohjoisnavasta maapallon pintaa pitkin mitattuna on kauimmainen paikka, johon satelliitista voidaan nähdä?

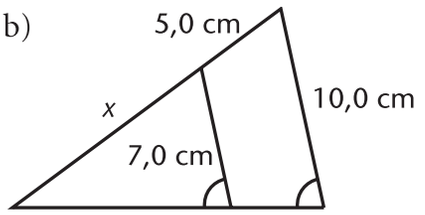
2. Harjoituskoe

1. Laske pituus x.

a)



b)



2. Ville tarkastelee karttaa, jonka mittakaava on 1:50 000.
   a) Hän mittaa kartalta Vesijärven pituudeksi 2,8 cm. Kuinka pitkä järvi on luonnossa?
   b) Hän arvioi kartalta Rämesuon pinta-alaksi 1,0 cm^2. Mikä on suon todellinen pinta-ala?

3. Kolmannen kerroksen ikkuna on 8,20 m:n korkeudella maanpinnasta. Ikkunasta katsellaan lähellä olevaa tornia. Tornin alareuna näkyy 12,2° katsojan silmän tason alapuolella ja yläreuna 26,3° silmän tason yläpuolella. Kuinka korkea torni on? Maanpinta oletetaan tasaiseksi.

4. Auton tuulilasinpyyhkimen yläpään etäisyys kiinnityspisteestään on 350 mm ja pyyhkimen alapään etäisyys kiinnityspisteestä on 100 mm. Sulka liikkuu 125°. Kuinka suuren alan yksi pyyhkijä puhdistaa?

5. Kuinka korkealla tulee Lontoon yläpuolella olevan satelliitin vähintään olla, jotta sen lähetys tavoittaisi Helsingin? Lontoon ja Helsingin etäisyys on 1900 km. Maapallon säde on 6370 km.

6. Puolipallon muotoisen saunapadan halkaisija on 100 cm. Pata täytetään hanasta, josta vesi virtaa nopeudella 0,35 l/s. Kuinka kauan täyttö kestää?

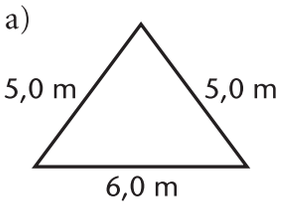
7. Teltta on muodoltaan suora, neliöpohjainen pyramidi, jonka pohjaneliön sivu on 3,2 m. Teltan tukikehikko muodostuu neljästä huipussa yhteenliitetystä 2,7 m:n pituisesta kepistä. Kuinka suuri on teltan tilavuus?

3. Harjoituskoe

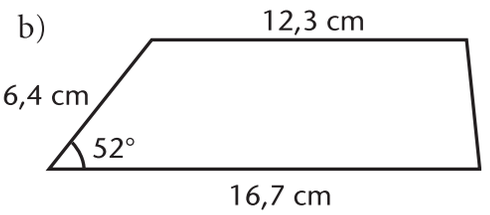
1. Reetta oli talvilomallaan Lapissa hiihtämässä. Illalla Reetta suunnitteli seuraavan päivän hiihtolenkin kartan avulla. Kartan mittakaava oli 1:50 000.
   a) Kuinka pitkän matkan Reetta hiihti seuraavana päivänä, kun lenkin pituus kartalta mitattuna oli 28 cm?
   b) Kuinka kauan hiihtolenkkiin tuli varata aikaa, kun Reetan hiihtonopeus oli 5,0 km/h?

2. Laske kuvioiden pinta-alat.

a)



b)



3. Ympyrän muotoisen marjapiirakan halkaisija on 22,8 cm.
   a) Laske piirakan pinta-ala.
   b) Kimi leikkasi piirakasta sektorin muotoisen palan. Palan keskuskulma oli 15° ja taikinareunan leveys 1,8 cm. Kuinka suuri osa (prosentteina) Kimin palan pinta-alasta oli täytetty marjoilla?

4. a) Kun Aurinko paistaa 55°:n kulmassa, lipputangosta muodostuu 17,8 metrin mittainen varjo. Laske lipputangon pituus.
   b) Suorakulmion sivujen pituuksien suhde on 1:3. Laske sivujen pituudet millimetrin tarkkuudella, kun suorakulmion piiri on 25 cm.

5. Jori leikkaa pahvista suorakulmaisen kolmion, jonka pinta-ala on 55,8 cm^2. Kolmion toinen kateetti on 6,5 cm toista lyhyempi. Laske kolmion sivujen pituudet.

6. Lentokone lentää 10,5 km:n korkeudella. Kuinka suuren osan maapallon kehästä koneen lentäjä näkee katsoessaan suoraan eteenpäin? Maapallon säde on 6370 km.

7. Laura seisoi keskellä tasaista puistoaluetta. Laurasta suoraan länteen 38,0 metrin päässä kasvoi 13,9 m korkea puu. Suoraan puun takana oli lintutorni, jonka huipun Laura juuri ja juuri näki. Kuinka pitkä matka puun juurelta on lintutornille, kun tornin korkeus on 25,5 m? Lauran pituus on 160 cm.

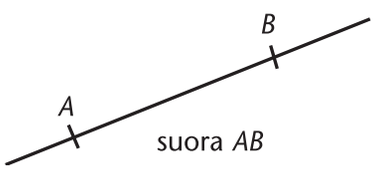
8. Lauri askartelee matematiikan tunnilla paperista säännöllisen neliöpohjaisen pyramidin. Pohjan lävistäjän pituus on 2,0 cm ja pyramidin korkeus 4,5 cm.
   a) Laske pyramidin tilavuus.
   b) Kuinka paljon paperia pyramidin rakentamiseen kuluu?

9. Suoran ympyrälieriön muotoinen astia täytetään vedellä. Täyttämiseen kuluu vettä 57,0 litraa. Laske lieriön korkeuden ja pohjan säteen pituus, kun lieriön poikkileikkauskuva on muodoltaan neliö.

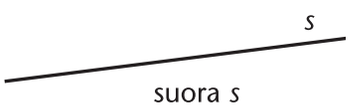
5 Ekstrat
Geometrian peruskäsitteitä

Piste on geometrian yksinkertaisin olio. Kuvioissa pisteitä kuvataan tavallisella pisteellä, ristillä tai lyhyellä poikkiviivalla. Pisteiden niminä käytetään isoja kirjaimia. Jokainen geometrinen kuvio tai kappale koostuu pisteistä. Esimerkiksi **viiva** muodostuu äärettömän tiheässä olevista peräkkäisistä pisteistä.

Suora on molempiin suuntiin rajattomasti jatkuva suora viiva. Kahden eri pisteen kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi suora. Jos kyseiset pisteet ovat *A* ja *B*, niin niiden kautta kulkevaa suoraa sanotaan suoraksi *AB*. Suoraa voidaan merkitä myös pienellä kirjaimella.

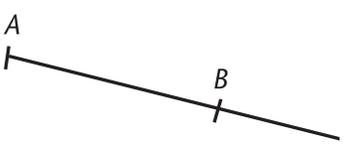


suora *AB*



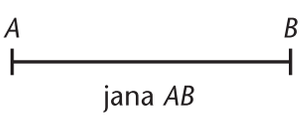
suora *s*

Tietystä pisteestä alkavaa, vain toiseen suuntaan rajattomasti jatkuvaa suoraa viivaa sanotaan **puolisuoraksi**. Puolisuora nimetään sen alkupisteen ja sillä sijaitsevan toisen pisteen mukaan.

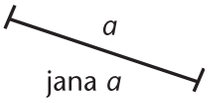


puolisuora *AB*

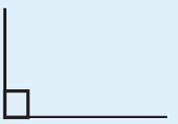
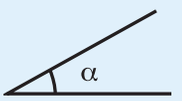
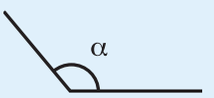
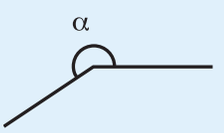
Kahden pisteen välistä suoraa viivaa sanotaan **janaksi**. Jos janan päätepisteet ovat *A* ja *B*, niin sitä sanotaan janaksi *AB*. Janaa voidaan merkitä myös pienellä kirjaimella.



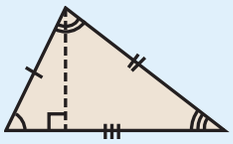
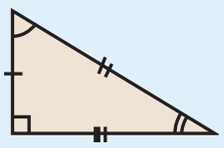
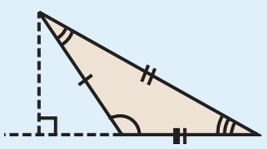
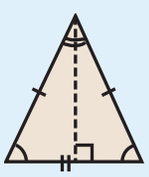
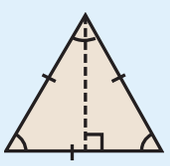
jana *AB*



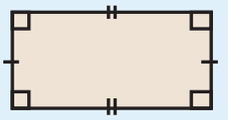
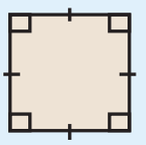
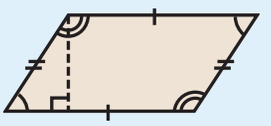
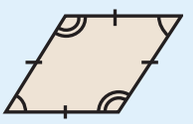
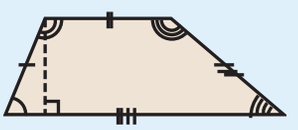
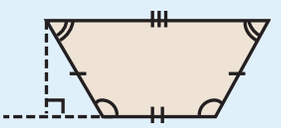
jana *a*

Nimi		Suuruus	Esimerkki
nollakulma		0°	
suora kulma		90°	
oikokulma		180°	
täysi kulma		360°	
kovera kulma	terävä kulma	$0° < \alpha < 90°$	
	tylppä kulma	$90° < \alpha < 180°$	
kupera kulma		$180° < \alpha < 360°$	

Erilaisia kolmioita

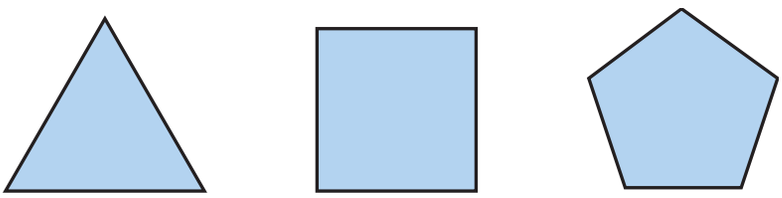
Teräväkulmainen kolmio	Teräväkulmaisen kolmion jokainen kulma on alle 90°. Kolmion korkeusjana on huipusta kantaa vastaan kohtisuoraan piirretty jana.	
Suorakulmainen kolmio	Suorakulmaisessa kolmiossa yksi kulma on 90°. Pisintä sivua sanotaan **hypotenuusaksi** ja lyhyempiä sivuja **kateeteiksi**. Kolmion korkeusjanaksi voidaan valita toinen kateeteista.	
Tylppäkulmainen kolmio	Tylppäkulmaisessa kolmiossa yksi kulma on yli 90°. Kolmion korkeusjana voi sijaita sen ulkopuolella kannan jatkeella.	
Tasakylkinen kolmio	Tasakylkisessä kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua. Jos kolmatta sivua pidetään kantana, kantakulmat ovat yhtä suuret. Huipusta piirretty korkeusjana puolittaa sekä kannan että huippukulman.	
Tasasivuinen kolmio	Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Tällöin myös kaikki kulmat ovat yhtä suuria. Huipusta piirretty korkeusjana puolittaa sekä kannan että huippukulman.	

Erilaisia nelikulmioita

Suorakulmio	Suorakulmion kaikki kulmat ovat 90°. Suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä ja yhdensuuntaisia.	
Neliö	Neliön kaikki kulmat ovat 90°. Neliön kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.	
Suunnikas	Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria. Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä ja yhdensuuntaisia.	
Neljäkäs eli vinoneliö	Neljäkkään vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria. Neljäkkään kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja vastakkaiset sivut yhdensuuntaisia.	
Puolisuunnikas	Puolisuunnikkaan kaikki kulmat voivat olla eri suuria. Puolisuunnikkaan kaikki sivut voivat olla eripituisia. Kaksi sivuista on yhdensuuntaisia.	
Tasakylkinen puolisuunnikas	Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantakulmat ovat yhtä suuret ja kannan vastaiset kulmat yhtä suuret. Tasakylkisen puolisuunnikkaan erisuuntaiset sivut ovat yhtä pitkät ja kaksi sivuista on yhdensuuntaisia.	

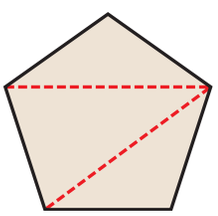
Säännölliset monikulmiot

Monikulmio on **säännöllinen**, jos sen kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat ovat yhtä suuria. Esimerkiksi tasasivuinen kolmio, neliö ja säännöllinen viisikulmio ovat säännöllisiä monikulmioita.

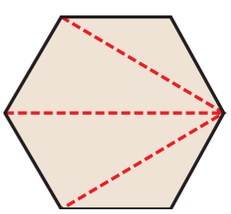


tasasivuinen kolmio | neliö | säännöllinen viisikulmio

Säännöllinen viisikulmio voidaan lävistäjillä jakaa kolmioiksi. Näitä kolmioita syntyy kolme kappaletta, joten kulmien summa on $3 \cdot 180° = 540°$.



Säännöllinen kuusikulmio voidaan lävistäjillä jakaa neljäksi kolmioksi. Kulmien summa on $4 \cdot 180° = 720°$.



Kaikki monikulmiot voidaan jakaa kolmioiksi. Tällöin monikulmion kulmien summa riippuu kolmioiden lukumäärästä. Kolmioiden lukumäärä puolestaan riippuu monikulmion kulmien lukumäärästä. Seuraavassa taulukossa on tarkasteltu kulmien lukumäärän ja kulmien summan välistä riippuvuutta.

Monikulmion nimi	Kulmien lukumäärä	Kulmien summa
kolmio	3	$1 \cdot 180°$
nelikulmio	4	$2 \cdot 180° = 360°$
viisikulmio	5	$3 \cdot 180° = 540°$
kahdeksankulmio	8	$6 \cdot 180° = 1080°$
12-kulmio	12	$10 \cdot 180° = 1800°$
n-kulmio	n	$(n - 2) \cdot 180°$

Kolmioita voidaan piirtää monikulmioon aina kaksi vähemmän kuin kulmia.

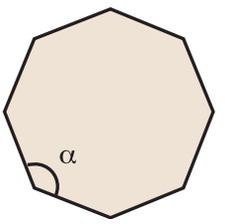
n-kulmion kulmien summa on $(n - 2) \cdot 180°$.

Esimerkki 1 Määritä kulma α, kun kuvio on säännöllinen 8-kulmio.

Ratkaisu

8-kulmion kulmien summa on
$(8-2)\cdot 180° = 6\cdot 180° = 1080°$.

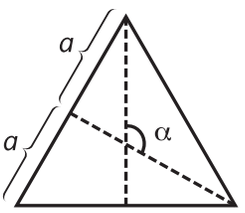
Näin ollen $\alpha = \frac{1080°}{8} = 135°$.

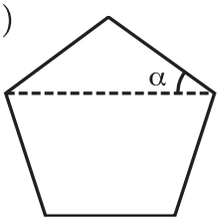


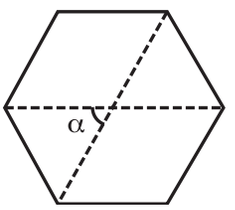
Vastaus $\alpha = 135°$

Tehtäviä

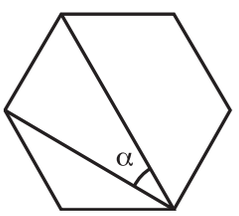
1. Laske kulma α, kun kuviot ovat säännöllisiä monikulmioita.

a)


b)


c)


2. Laske kulma α, kun monikulmio on säännöllinen kuusikulmio.



Yksikkömuunnokset

POHDINTA 1 Täydennä taulukkoon **järkevät** yksiköt.

Esine	Pohjan pituus	Pohjan pinta-ala	Tilavuus
tulitikkuaski	55	20	30
karkkirasia	1,5	177	5
mehupurkki	7,5	0,4	1,5
matkalaukku	1,0	0,2	0,1

Laske neljän esineen yhteistilavuus. Mitä tietoja ja taitoja tarvitset tämän tilavuuden laskemiseen?

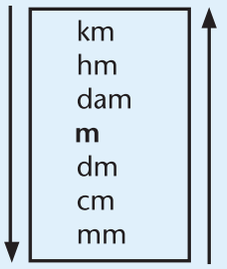
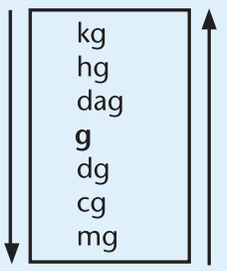
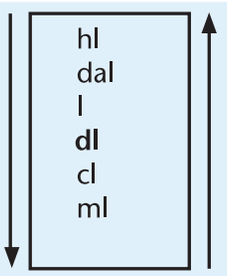
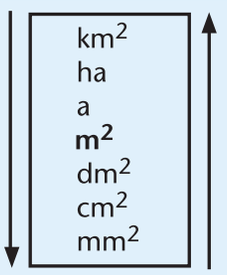
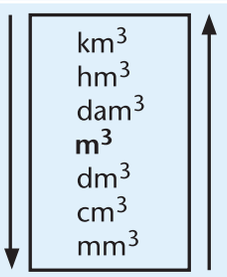
Geometrian tehtäviin liittyy usein pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskemista. Ennen tehtävän ratkaisua tulee kiinnittää huomiota suureiden yksiköihin, koska

- yhteen- ja vähennyslaskut voidaan suorittaa vain, jos suureiden yksiköt ovat samat
- suureiden vertailu onnistuu vain, jos ne on ilmoitettu samassa yksikössä
- yhtälön kummallakin puolella esiintyvien lausekkeiden yksiköiden tulee olla samat.

Pituuden, pinta-alan ja tilavuuden yksiköitä muunnetaan joko kertomalla tai jakamalla sopivalla **suhdeluvulla**. Pituuden yksiköissä suhdelukuna on 10. Kun esimerkiksi metrejä muunnetaan desimetreiksi, tulee lukuarvo kertoa suhdeluvulla 10.

$$2\ \text{m} = 2 \cdot 10\ \text{dm} = 20\ \text{dm} = 20 \cdot 10\ \text{cm} = 200\ \text{cm}$$
$$150\ \text{cm} = 150 : 10\ \text{dm} = 15\ \text{dm} = 15 : 10\ \text{m} = 1{,}5\ \text{m}$$

Myös massan ja vetoisuuden yksiköissä suhdeluku on 10. Pinta-alan yksiköissä suhdeluku on 100 ja tilavuuden yksiköissä 1000.

Suure	Muunnokset	Esimerkit
Pituus	 Seuraavaan yksikköön muunnettaessa kerrotaan tai jaetaan luvulla 10.	3,5 m = 35 dm = 350 cm = 3500 mm 184 dm = 18,4 m = 1,84 dam = 0,184 hm
Massa		0,35 g = 3,5 dg = 35 cg = 350 mg 1200 dg = 120 g = 12 dag = 1,2 hg
Vetoisuus		2,3 dal = 23 l = 230 dl = 2300 cl 4500 ml = 450 cl = 45 dl = 4,5 l
Pinta-ala	 Seuraavaan yksikköön muunnettaessa kerrotaan tai jaetaan luvulla 100.	3,1 ha = 310 a = 31 000 m^2 250 cm^2 = 2,5 dm^2 = 0,025 m^2
Tilavuus	 Seuraavaan yksikköön muunnettaessa kerrotaan tai jaetaan luvulla 1000. Tilavuusmitat voidaan muuntaa vetomitoiksi.	2600 mm^3 = 2,6 cm^3 = 0,0026 dm^3 0,061 m^3 = 61 dm^3 = 61 000 cm^3 1 m^3 = 1000 l 1 dm^3 = 1 l

Tehtäviä

3. Ilmoita seuraavat pituudet suluissa mainitussa yksikössä.
   a) 0,567 m (cm) b) 1 m (km)
   c) 1,07 dm (cm) d) 1,07 dm (m)

4. Ilmoita seuraavat pinta-alat suluissa mainitussa yksikössä.
   a) 1,5 m^2 (a) b) 11 m^2 (ha)
   c) 1,73265 km^2 (a) d) 1,73265 m^2 (mm^2)

5. Ilmoita seuraavat tilavuudet suluissa mainitussa yksikössä.
   a) 1,7 m^3 (dm^3) b) 1,73 m^3 (cm^3)
   c) 5,6002 m^3 (km^3) d) 0,056 m^3 (mm^3)

6. Ilmoita seuraavat vetomitat suluissa mainitussa yksikössä.
   a) 6 dl (l) b) 7,96 l (dl)
   c) 17 ml (dl) d) 0,37 dl (cl)

7. Ilmoita seuraavat tilavuudet suluissa mainitussa yksikössä.
   a) 27 m^3 (l) b) 0,54 dm^3 (dl)
   c) 17 ml (cm^3) d) 38 l (dam^3)

8. Ilmoita suluissa mainitussa yksikössä.
   a) 4 hm (m) b) 5 a (dm^2)
   c) 450 cl (l) d) 46,7 dm^3 (m^3)

Tehtävien vastaukset

1.2 Kulmia

1. a) 155° b) 38°
2. $\alpha = 47°$, $\beta = 133°$
3. $x = 38{,}2°$
4. $\alpha = 49°$, $\beta = 131°$
5. Eivät ole, sillä 102 asteen kulman ristikulma on samankohtainen kulma 82 asteen kulman kanssa.
6. $\alpha = 68°$
7. $\alpha = 55°$
8. $\alpha = 29°$, $\beta = 68°$, $\gamma = 83°$
9. $\beta = 75°$
10. 71°, 38°
11. 20°, 60°, 100°
12. $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$
13. 72,5°, 107,5°
14. a) $\alpha = 22°$, $\beta = 68°$
    b) $\alpha = 72°$, $\beta = 18°$
15. 45°, 135°, 56°, 124°
16. 60°, 120°
17. a) 51° b) 76° c) 62°
18. 76° ja 104°
19. $\beta = 30°$
20. 31,5°, 49,5° ja 99°

1.3 Yhdenmuotoisuus

21. a) 7,1 cm
    b) kaulan pituus 42 mm, kaulan leveys 31 mm
22. Kulma C yhteinen, kulmat D ja A sekä B ja E samankohtaisina yhtä suuret, kk-lause.
23. Eivät ole.
24. 5,6 cm
25. a) 4,5 m b) 18 m
26. 11 m
27. 170 cm
28. 60 m
29. 441 a
30. 6,5 dm = 65 cm
31. $a = 30$ cm, $b = 40$ cm
32. 7,3 cm
33. Ei näe.

1.4 Yhdenmuotoisuussuhde

34. 3,8 m ja 2,9 m
35. 11 m
36. 2 cm
37. 290 cm
38. 1:32 000
39. a) 13 cm b) 12 min
40. 63 cm^2
41. 25:64
42. 150 cm^2
43. 3,4 m
44. 1:200, 12 m^2
45. a) 10,8 cm b) 1:15 625
46. 3:80 000
47. a) pituus 260 m, leveys 180 m
    b) 4,68 ha
48. 48,6 cm^2
49. mittakaava 1:600, mitat 24 m ja 15 m

1.5 Pythagoraan lause

50. a) 14 m b) 7,5 cm
51. a) 9,5 m b) 5,8 cm
52. 74 cm
53. 2,0 dm
54. 3,7 m
55. 6,8 m
56. 320 cm
57. 310 m
58. 4,9 cm, 7,9 cm
59. 89 cm, 133 cm
60. 0,6 km
61. 5,2 m
62. 3,0 m
63. auto, 1,5 h:n kuluttua
64. 22 km
65. a) 4,9 cm b) 10 m
66. 63 cm
67. 16,3 m
68. 56 min
69. 0,33 m, 0,75 m

1.6 Suorakulmaisen kolmion trigonometria

70. a) 67° b) 40°
71. a) 10,0 cm b) 33 mm
72. a) 41° b) 2,4 cm
73. 27,5°; 62,5°; 90°
74. a) 9,7 cm b) 0,92 m
75. 15 cm
76. 72°
77. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$
78. 33°
79. 2,16 m
80. a) 11,5°; 78,5°
    b) 36,9°; 53,1°
81. 2,6 dm, 2,8 dm
82. 31 mm, 73°
83. 6,93 cm
84. 7,6 m
85. Nousee.
86. 23°
87. 56°
88. 4 min
89. a) 14 km b) 5,1 km
90. 11 m
91. 478 m tai 3340 m

92. $\alpha = 24°$, $\beta = 47°$
93. 320 m
94. 4,5°
95. Eivät osu.
96. 500 m, 26 m

1.7 Pinta-aloja

97. a) 197 cm^2 b) 98 cm^2
98. a) 15 cm^2 b) 98 cm^2
99. a) 68 mm^2 b) 90 m^2
100. 8300 $cm^2 = 0{,}83\ m^2$
101. 150 m^2
102. a) 680 cm^2 b) 57 cm^2
103. 340 cm^2
104. 510 cm^2
105. 6,3 cm^2
106. 120 m^2
107. 480 dm^2
108. 6,3 m
109. kanta 25 dm, korkeus 5,1 dm
110. 6,0 cm ja 11 cm
111. 8,0 cm ja 5,0 cm
112. 32,4 cm^2
113. 3 m ja 5 m
114. 53° ja 127°
115. $\frac{14+\sqrt{31}}{4}a^2 \approx 4{,}9a^2$
116. 90 %
117. a) 42 cm^2 b) 36 cm^2
118. 4,3 cm^2
119. kanta 5,20 cm, kyljet 10,7 cm
120. 12 m ja 18 m
121. 480 m^2

2.1 Kehän pituus ja ala

122. a) 15 mm b) 47 cm
c) $8\pi x$
123. a) 14 m b) 0,24 cm
124. a) 14 m b) 44 cm
125. 2,0 cm
126. 0,54 m
127. 24 km
128. korkeus 2,4 m, leveys 94 cm
129. 140 cm
130. a) 5500 mm^2
b) 7,5 m^2
c) $25\pi a^2$
131. a) 110 m^2 b) 0,2 m^2
132. a) 6,77 mm b) 230 m
133. 1,1 m^2
134. 79 %
135. 3016 autoa
136. 21 %
137. 2460 m^2
138. a) 43 cm b) 1 dm^2
139. a) 35,8 cm, 102 cm^2
b) 57,5 cm, 263 cm^2
140. 35 min
141. 15 cm^2
142. 71 %
143. 100 m

2.2 Sektori ja segmentti

144. a) 3,2 m b) 1,1 cm
145. a) 42 m^2 b) 75 cm^2
146. a) 59 cm b) 770 cm^2
147. 75°
148. 79 cm
149. 750 mm
150. 57°
151. 273 m^2
152. 59°
153. a) 70° b) 1700 cm^2
154. 240 cm^2, 35°
155. 8,1 cm^2
156. 0,419
157. 233 m
158. a) 37 mm b) 12,0 cm
159. 12 m
160. 3,5 cm^2
161. 18 cm^2
162. 14 cm^2
163. a) 7,0 cm^2 b) 78°
c) 5,1 cm
164. a) 23 cm b) 3,7 cm
165. 150 cm^2
166. a) 130° b) 870 cm^2
167. 2,3 m^2

2.3 Ympyrän tangentti

168. a) 126° b) 130°
169. a) 51° b) 231°
170. 39°
171. 27°
172. 67°
173. 1,91°
174. 5,8 cm
175. a) 360 km b) 2380 km
176. 5,9 m
177. 4,66 km
178. kyllä
179. 15 km
180. 1560 km
181. 26,5 km
182. 27 cm
183. 65 %
184. a) 174° b) 8,3 m
185. 63°:n kulmassa
186. 20 km
187. 1,8 %
188. 2,2 m

3.1 Lieriö

189. 6,9 cm
190. 3,3 dm
191. a) 57 cm
b) 52°:n kulman
192. ei
193. 4,0 cm
194. a) 84 cm^3 b) 130 m^3
c) 8,8 m^3
195. a) 430 cm^3 b) 101 m^3
196. a) 360 cm^2 b) 1,5 dm^2
197. a) 210 cm^2 b) 140 cm^3
198. 730 cm^2
199. 125
200. a) 6,3 % b) 17 m^3
201. a) 4,4 l
b) $\frac{1}{6}$ jäljellä (0,7 l)

202. a) 570 cm^3, 510 cm^3
b) 12,5 % ≈ 13 %
203. 430 cm^2, 630 cm^3
204. 0,729 cm^3
205. Lieriön, jonka korkeus on 30 cm. Tilavuuksien suhde 4:3.
206. 79 %
207. a) 140 cm^3 b) 290 cm^3
208. a) 384 cm^2 b) 13,9 cm
209. 25 cm
210. Voidaan nostaa.
211. a) 998 cm^3 b) 553 cm^2
212. a) 4,7 dm b) 1,5 m^2

3.2 Kartio

213. 170 m^2
214. a) 5,1 dm^2 b) 13 dm^2
215. 270 mm^2
216. 4,5 m^2
217. 120 cm^2
218. 15 m^2
219. 52 dm^2
220. 37 dm^2, 59 cm
221. a) 63 dm^3 b) 7,0 m^3
222. 1,3 dm^3
223. a) 1,1 dm^3 b) 280 %
224. 1,0 dm^3
225. 63 dm^3
226. säde 7,3 cm, korkeus 22 cm
227. a) 12,0 cm, 14,5 cm
b) 1,2 dm^2
228. a) 2 200 000 m^3
b) 0,014 %
229. 3,8 dm^2
230. a) 97 dm^2, 110 dm^3
b) 202 cm^2, 280 cm^3
231. a) 109 a b) 103 m
232. 8,46 l
233. 20 m
234. 12 cm

3.3 Pallo

235. 72 m^2, 58 m^3
236. 0,72 dl
237. a) 74 l b) 85 dm^2
238. 7257 g
239. 33 %
240. 567 cm^2
241. 3,8 cm
242. 81 %
243. 17 %
244. 1,6 m^2
245. a) 44 % b) 125 %
246. 2,4 dm^3
247. 2610 km
248. 0,8 km
249. 80 ° pohj. lev.
250. 7029 km
251. 705 km/h
252. a) 58,1 dm^2 b) 41,6 dm^3
253. 15 euroa/l
254. 3,10 cm
255. 20 011 km ≈ 20 000 km
256. 22,1 kg

4 Kertausosa

1. $\alpha = 108{,}5°$ ja $\beta = 71{,}5°$
2. 16°
3. 21 cm, 63 cm ja 36 cm
4. 51° ja 129°
5. $\alpha = 22{,}5°$ ja $\beta = 45°$
6. 96 cm
7. 2,2 m
8. 0,22 m^2
9. 166 cm
10. 0,8 ha
11. 16 %
12. 56 %
13. 7,3 cm
14. 14 cm tai 17 cm
15. 0,69 m
16. a) 47° b) 9,4 m
17. 34° ja 56°
18. 170 m
19. kanta 8,4 cm, kyljet 12 cm
20. 17 m
21. a) 6,9 m^2 b) 29 cm^2
22. 83,1 cm^2
23. 6,6 cm ja 11,6 cm
24. 5,0 cm tai 18 cm
25. 19 dm^2
26. a) 11 dm^2 b) 35 dm^2
27. 7,0 m × 12 m
28. 12 m, 12 m, 15 m ja 12,4 m
29. 28 kpl
30. 21 cm
31. 38 cm^2
32. 31 cm
33. kehä 100 dm, säde 16 dm
34. 57°
35. 240 mm^2
36. 30 m
37. 21 km:n päähän
38. 10 %
39. 460 m
40. 39 %
41. 6,7 cm
42. 6,6 dm
43. 2,60 cm
44. 79 %
45. 390 cm^2
46. 160 dm^2, 200 dm^3
47. 72 m^2
48. 32 dm^3
49. 19 cm (jalan kanssa) ´
50. 520 cm^2
51. 49,8 dm^2
53. π:6 ≈ 0,52
53. 1,6 kg
54. 5230 km
55. 180 kg
56. 2:3

1. Harjoituskoe

1. a) $\alpha = 115°$, $\beta = 80°$
   b) $\alpha = 70°$, $\beta = 70°$
2. a) 40 m b) 11°
   c) 520 000 litraa
3. a) Susanna 245°,
   Lassi 115°
   b) 64 cm
4. 1,2 km
5. a) 0,82 dl b) 100 cm^2
6. a) 1:100
   b) Mitat ovat 4,0 m
   ja 2,5 m.
7. a) 2,2 km b) 22 min
8. a) 2970 km b) 5230 km

2. Harjoituskoe

1. a) 3,3 cm b) 12 cm
2. a) 1,4 km b) 25 ha
3. 26,9 m
4. 12 dm^2
5. 290 km
6. 12,5 min
7. 5,0 m^3

3. Harjoituskoe

1. a) 14 km
   b) 2 h 48 min
2. a) 12 m^2 b) 73 cm^2
3. a) 408 cm^2 b) 71 %
4. a) 10 m
   b) 3,1 cm ja 9,4 cm
5. Kateetit ovat
   14 cm, 7,8 cm ja
   hypotenuusa 16 cm.
6. 0,913 %
7. 35,8 m
8. a) 3 cm^3 b) 15 cm^2
9. pohjan säde 20,9 cm,
   korkeus 41,7 cm

5 Ekstrat

1. a) 120° b) 36°
   c) 60°
2. 30°
3. a) 56,7 cm b) 0,001 km
   c) 10,7 cm d) 0,107 m
4. a) 0,015 a
   b) 0,0011 ha
   c) 17 326,5 a
   d) 1 732 650 mm^2
5. a) 1700 dm^3
   b) $1{,}73 \cdot 10^6$ cm^3
   c) $5{,}6002 \cdot 10^{-9}$ km^3
   d) $5{,}6 \cdot 10^7$ mm^3
6. a) 0,6 l b) 79,6 dl
   c) 0,17 dl d) 3,7 cl
7. a) 27 000 l
   b) 5,4 dl
   c) 17 cm^3
   d) $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ dam^3
8. a) 400 m
   b) 50 000 dm^2
   c) 4,5 l
   d) 0,0467 m^3

Hakemisto

A
avaruusgeometria 8

E
ekvaattori 124

H
halkaisija 64, 120
huippu 13, 108
huippukulma 13

I
isoympyrä 123

J
jana 141
jänne 74, 120

K
kaaren asteluku 78
kanta 13
kantakulma 13
kartio 108
kateetti 44
kehä 64
kehäpiste 64
keskipiste 64, 120
keskuskulma 74
kk-lause 24
kolmio 13, 54
korkeusjana 13
kosini 44
kulma 9
kylki 13

L
lieriö 96, 101

M
meridiaani 123
mittakaava 28

N
nelikulmio 15
nollameridiaani 123

O
oikea kylki 9
oikokulma 10

P
pallo 120
pallopinta 120
pikkuympyrä 123
pintasuhde 30
piste 141
pituuspiiri 123
puolisuora 141
puolisuunnikas 57
pyramidi 108, 111
Pythagoraan lause 36
päiväntasaaja 124

R
ristikulma 10

S
samankohtaiset kulmat 10
segmentti 74, 78
sekantti 85
sektori 74
sini 44
sivujana 96, 108
suhdeluku 147
suora 141
suora lieriö 96
suorakulmio 53
säde 64, 120
särmiö 97

T
tahko 97
tangentti 44, 85
tangenttikulma 86
tasogeometria 8

V
vaippa 96, 108
vasen kylki 9
vastinosa 22
vieruskulma 10
viiva 141
vino lieriö 96

Y
yhdenmuotoisuus 22
yhdenmuotoisuussuhde 28
ympyräkartio 108, 111
ympyrälieriö 99